

# ドレスト光子はグラフをどのように捉えているか

瀬川悦生  
(横浜国立大学)

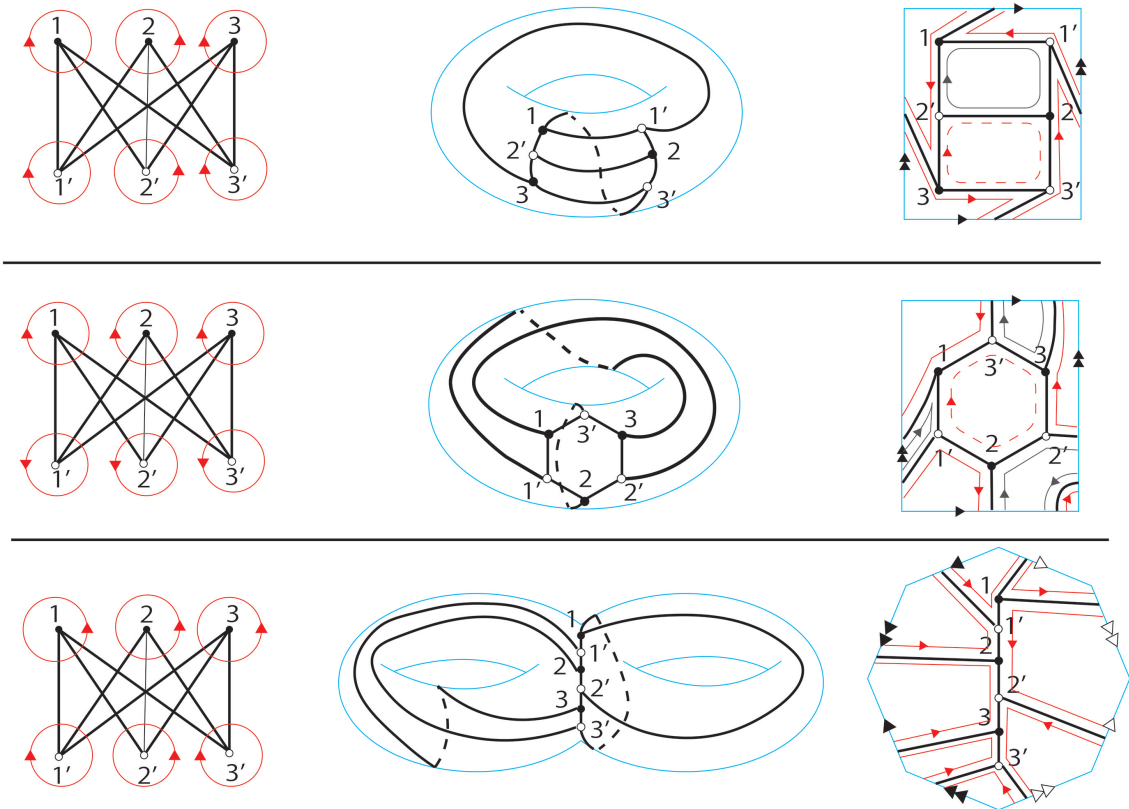
量子ウォークの時間発展作用素は、ユニタリ作用素で記述される。これは、各状態が検出される確率がノルムの2乗で与えられるためである。このユニタリ性の制約は、一見するとグラフの空間構造にも強い制約を生むように見える。しかしながら、視点を頂点から辺に一次元上に向けた、グラフの(有向)ライングラフ化は、最も自然にグラフ上の量子離散ダイナミクスの構成を可能にする概念である。このことによって、任意の連結グラフにおいて、対称有向辺を舞台にした、ユニタリダイナミクスが作れる [1]。こうして、各頂点  $u \in V$  に、その次数次元  $d(u)$  のユニタリ行列  $C_u$  を配置することによって、非自明な量子離散ダイナミクスが実現する。これが量子ウォークである。

ところでその際に、各ユニタリ行列の基底ベクトルとその頂点  $u$  に刺さっている有向辺  $A_u = \{a \in A \mid t(a) = u\}$  の間に同型写像  $\pi_u : \{e_1, \dots, e_{d(u)}\} \rightarrow A_u$  を暗に与えていることになるから、グラフ  $G = (V, A)$  上の量子ウォークの時間発展は  $(G, \{C_u\}_{u \in V}, \{\pi_u\}_{u \in V})$  の3組で与えられることとなる。特に、 $P_u$  を  $\pi_u$  を表現する置換行列とすると量子ウォークのダイナミクスは  $P_u C_u P_u^{-1}$  の  $u \in V$  に関する直和、 $C = \sum_{u \in V} P_u C_u P_u^{-1}$  と有向辺の向きを反転させることを表現する置換行列  $S$  の積、 $U = SC$ 、で表現される。この各頂点  $u \in V$  における同型写像  $\pi_u$  の与え方は全部で  $\prod_{u \in V} d(u)!$  通りだけあり、さらにユニタリ行列  $C_u$  に至っては、非加算無限通りのチョイスがある。当初構成が可能なグラフが少なすぎて困っていたのに、気が付くと、今度はどんな連結グラフでも構成できるどころか、非加算無限個とれてしまい、オプションがありすぎてどれにするか迷ってしまう、“うれしい”悲鳴があがる事態になる。

そのような中でなぜ Grover walk がよく選ばれるかが次のようにしてよくわかる。Grover walk は全ての  $u \in V$  に対して  $C_u$  として、 $d(u)$  次元の Grover 行列  $\text{Gr}(d(u)) = 2/d(u)J_u - I_u$  が与えられたときのことをいう。但し、 $J_u$  は全ての成分が1である行列で、 $I_u$  は単位行列である。任意の自然数  $d$  に対して、 $\text{Gr}(d)$  はユニタリであるから、この行列のクラス  $\{\text{Gr}(d)\}_{d \in \mathbb{N}}$  による一貫した構成ができる。これが第一の利点である。しかし Grover 行列以外にも、このようなユニタリ行列のクラスは多数存在するが、(例えば、離散フーリエ行列)、他にはなかなか見られない第二の顕著な利点が、行列の形から明らかなように、任意の置換行列と可換であるという点である。したがって、どのような  $\pi_u$  を選んできて、 $P_u \text{Gr}(d(u)) P_u^{-1} = \text{Gr}(d(u))$  である。これは、 $\prod_{u \in V} \deg(u)!$  だけの有向辺のラベリングの選択の煩わしさがなくなり、どの頂点に対しても一貫して“各頂点  $u$  で透過で  $2/d(u)$ 、反射で  $2/d(u) - 1$  の重みで遷移する”と表現することができる。しかも、ランダムウォークと全く異なる非自明な挙動が現れるのであるから、お手軽な量子ウォークモデルとして位置づけられる。

しかしその便利さと引き換えに、グラフの隣接関係という必要最低限の要件しか、ダイナミクスには反映されない。例えば、図のようなグラフたちは、グラフの隣接関係の視点からは同型ではあるが、挙動に違いがあってもよいのではと思いたくなる。しかし残念ながら上述の理由から Grover walk は全て同じものとして認識する。このような点からもドレスト光子の挙動を量子ウォークでシミュレートする立場で見れば、例えば、ドレスト光子の出力を最大に

する最適配置の結果 [2] を再現するには, Grover walk では粗すぎのようにも思える. いずれにしても, これらのグラフの違いは, 背後にある閉曲面上の (二胎体) 埋め込みの実現方法の違いから来る [3]. 実はこの埋め込みは, 向き付け可能な場合, グラフの各頂点  $u \in V$  に対して, その頂点に刺さっている有向辺の集合  $A_u$  上の巡回置換  $\rho_u$  を適当に配置することによって実現される (図を参照). 逆にグラフ  $G$  と各頂点上の巡回置換  $\{\rho_u\}_{u \in V} =: \rho$  の組,  $(G, \rho)$  が与えられると, オイラーの定理から, 種数  $1 + (-|r(\rho)| + |E| - |V|)/2$  のトーラス上への埋め込みが実現される (図を参照). ここで,  $r(\rho)$  は  $\rho$  に従う, グラフ  $G$  上の閉路 (沿側閉路) の個数である. つまり, この沿側閉路が埋め込まれた面に対応する. グラフの閉曲面埋め込みに関するより詳細は例えば [3] を参照.



Rotations and two-cell embeddings of  $K_{3,3}$  on orientable surfaces.

そこで, この埋め込みがダイナミクスに反映, つまり,  $G$  だけではなく, その背後にある埋め込み,  $\rho$  も含めたペア  $(G, \rho)$  で誘導される量子ウォークモデルの構成を試みる. それは, 量子コインとして, 頂点  $u \in V$  に対して,  $\rho_u$  で生成される置換群にのみ, 可換なユニタリ行列を探してくることに対応するであろう. 例えば離散フーリエ行列と双対な巡回行列 (ただしユニタリになるように設定) はこれを満たすので, 次のようなものが考えられる. 2次元のユニタリ行列

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対して,

$$C_u = \text{Circ}(H, d(u)) = bcP_u(\lambda I_u - aP_u)^{-1} + dI_u.$$

ここで  $\lambda$  は  $|\lambda| = 1$  のパラメータ,  $P_u$  は巡回置換  $\rho_u$  の表現行列である.

実は, この量子ウォークは  $G$  を  $\rho$  にしたがって,  $G$  の各頂点を有向サイクルに膨らませてできる膨張グラフ  $\tilde{G}$  の上で,  $H$  によって駆動する量子ウォークモデルとして解釈することができる, 解りつつある. この膨張グラフ上の量子ウォークのことを Facial 量子ウォークと呼ぶ. そうなると,  $\prod_{u \in V} (d(u) - 1)!$  通りの中からドレスト光子の挙動にマッチするようなローテーションを考えることにより, ドレスト光子がグラフをどのように捉えているかを見ることできないか? 実際に [2] の入力エネルギーの大きさに対する出力エネルギーの漸近的に単調非増加性を与える非直感的な結果を, 実現できるような車輪グラフへの適切な埋め込みを探すことで, 取り組んでおり, 今後の進展が期待される.

この Facial 量子ウォークの定常状態は,  $d$  が実数値の場合, その定常状態が埋め込まれた閉曲面の境界閉路 (=面) の中で, 外部の流出入を受ける面のみを用いて, 表現ができる [4]. 最後に, この事実を用いて, この図にある  $K_{3,3}$  の背後にある埋め込まれた閉曲面を出力から言い当てる方法をデモンストレーションしてみる. 図に描画されたそれぞれの埋め込みを上から順に type-1, type-2, type-3 と呼ぶことにする. 外部から流出入を行う tail が全ての頂点に刺さっているとす. この tail たちは

$$\begin{cases} \text{頂点 } \{1, 2, 3\} \text{ では, } 1' \text{ と } 2' \text{ の間に tail が位置するように刺し,} \\ \text{頂点 } \{1', 2', 3'\} \text{ では, } 1 \text{ と } 2 \text{ の間に tail が位置するように刺す.} \end{cases} \quad (0.1)$$

そして, 頂点 1 からのみ流入を与えたとする. 時間が十分経過した後, 量子ウォークを検出した tail の個数を  $N$  とする. すると, 次の事が言える.

$$K_{3,3} \text{ の背後にある埋め込み} = \begin{cases} \text{type-1} & : N = 4, \\ \text{type-2} & : N = 2, \\ \text{type-3} & : N = 6. \end{cases} \quad (0.2)$$

検出 tail 数  $N$  の導出は, 次のようにそれぞれの埋め込みの一番右側の展開図を使うのが便利である. tail を (0.1) の設定にしたがってそれぞれ 3 種類の展開図に書き込む. そのときに, 頂点 1 に刺さっている tail と同じ面に入っている tail が量子ウォークを検出することのできる tail になる. その本数が  $N$  となる. このようにして, 量子ウォークの挙動を調べることによって, 背後にある閉曲面の情報 (例えば穴の数など) を推定する逆問題をこのようなわかりやすくビジュアル化させた理解に基づくアプローチで説明が可能なこともこの研究の面白いところである.

## References

- [1] S. Severini, The underlying digraph of a coined quantum random walk, Erato Conference in Quantum Information Science (2003).
- [2] M. Naruse et al., Autonomy in excitation transfer via optical near-field interactions and its implications for information networking, Nano Communication Networks 2 (2011) 189–195.
- [3] 中本敦浩, 小関健太, 曲面上のグラフ理論, サイエンス社 (2021)
- [4] Yu. Higuchi, E. Segawa, Quantum walks on graphs embedded in orientable surfaces, in preparation (2023+).