

オンシエル・オフシエルとフォック空間

安藤 浩志 (千葉大理)

ドレスト光子: ナノメートル寸法の領域で電子や電子・正孔対と光子が結合して出来た準粒子を記述するモデルを見つける事に興味があるのですが、まず現在知られている、一般的な電磁場と電子の相互作用を記述する系について振り返ってみます (詳細は [1] にあります). その為に (ボソン) フォック空間について述べます (フェルミオンフォック空間も構成可能). これはオンシエルの粒子, すなわち分散関係 (エネルギー・運動量の関係) が決まった粒子の生成・消滅を記述するに適したヒルベルト空間です. この文脈ではオンシエル粒子とは電磁場の量子化に伴う光子の事です. 具体的には 1 粒子の状態を表すヒルベルト空間を \mathcal{H} とし, その n 重対称テンソル積 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ (同一のボーズ粒子 n 個の状態を指定するヒルベルト空間) を考え, そのヒルベルト空間としての直和 $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$ ($\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$) を \mathcal{H} 上のボソンフォック空間と言います. $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ を真空ベクトルと言います. $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ を対称化したものを

$$S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)}$$

とします (\mathfrak{S}_n は $\{1, \dots, n\}$ の置換全体). 1 粒子状態 $f \in \mathcal{H}$ に対して, (非有界) 作用素 $a(f), a(f)^*$ を $a(f)\Omega = 0, a(f)^*\Omega = f$ および

$$a(f)S_{n+1}(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \langle f, \phi_j \rangle S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \hat{\phi}_j \otimes \dots \otimes \phi_{n+1})$$

$$a(f)^*S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) = \sqrt{n+1}S_{n+1}(f \otimes \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n)$$

を満たすように定めます ($\hat{\phi}_n$ は ϕ_j を省く事を意味します. 定義域等の正確な定義は [1]). $a(f)^*$ を生成作用素, $a(f)$ を消滅作用素といい, f で指定される粒子を 1 つ生成あるいは消滅させる役割を持ちます. 本当は, これらからシーガルの場の作用素と呼ばれる自己共役作用素 $\Phi_S(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a(f)^*)$ が得られます. 次に量子場の中で最も構造が単純な, クライン・ゴールドン場 (自由中性スカラー場) について述べます. $m \geq 0$ を粒子の質量とします. (運動量表示の) 1 粒子状態空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ を取り, $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b(\mathcal{H})$ とします. 各運動量ベクトル $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\omega_m(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ とします.

$$(F_m f)(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\omega_m(\mathbf{k})t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) dt d\mathbf{x}.$$

とし, $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ (実数値急減少関数の空間) に対して,

$$\Phi(f) = \sqrt{2\hbar\pi}\Phi_S \left(\frac{F_m(f)}{\sqrt{\omega_m}} \right)$$

と定めます. これは, 各点 $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$ における演算子 $\Phi(t, \mathbf{x})$ (実際には存在しないのですが) があつたとして, それを平均化したもの $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} f(t, \mathbf{x}) \Phi(t, \mathbf{x}) dt d\mathbf{x}$ であると解釈されます. 同様の事情で $a(\mathbf{k})^*, a(\mathbf{k})$ をエネルギー・運動量が $k = (\omega_m(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ である粒子を生成・消滅させる演算子を \mathcal{F} 上定義することが困難な為, その f 平均化の結果として $a(f)^* = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ 等が導入されています. 量子化された場 Φ は \mathcal{F} の適当な稠密部分空間の上で $\Phi((\square + m^2)f) = 0$ を満たします. よって Φ はクライン・ゴールドン方程式 $(\square + m^2)\Phi_{cl}(x) = 0$ を満たす古典場 $\Phi_{cl}(x)$ を量子化したもの (を均したもの) と言えます. 平均化を施す前の場合は, オンシエルの分散関係 $k^0 = \omega_m(\mathbf{k})$

を満たす粒子を生成・消滅させる機能を持つ事に注意しましょう。次に自由電磁場の量子化には複数の方法がありますが、ここではクーロンゲージを考えます。先ず各 $(0 \neq) \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して、単位ベクトル $e^{(1)}(\mathbf{k}), e^{(2)}(\mathbf{k})$ で、 $\{\mathbf{k}/|\mathbf{k}|, e^{(1)}(\mathbf{k}), e^{(2)}(\mathbf{k})\}$ が \mathbb{R}^3 の正規直交基底となるようにとります。光子の1粒子ヒルベルト空間は、偏極の自由度を考慮して $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)^{\oplus 2}$ とし、そのうえのボソnfock空間 \mathcal{F} 上で、 $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ で均された偏極 $r = 1, 2$ の光子の生成・消滅作用素 $a^{(r)}(g)^*, a^{(r)}(g)$ を $a^{(1)}(g) = a(f, 0), a^{(2)}(g) = a(0, g)$ で定め、均されたベクトルポテンシャル $A_j(f) \text{“} = \text{”} \int_{\mathbb{R}^4} f(t, \mathbf{x}) A_j(t, \mathbf{x}) dt d\mathbf{x}$ を、 $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ に対して、

$$A_j(f) = \Phi_S \left(\omega_0^{-\frac{1}{2}} e_j^{(1)} F_0 f, \omega_0^{-\frac{1}{2}} e_j^{(2)} F_0 f \right), \quad j = 1, 2, 3$$

とします。クライン・ゴールドン場の場合と同様に、適当な定義域の上で $A_j(\square f) = 0$ およびクーロンゲージ条件に相当する $\sum_{j=1,3} A_j(\partial_j f) = 0$ が成り立ちます。大切なことは、上で述べた生成・消滅演算子は(均しが入っているとはいえ)分散関係の決まったオンシェル光子の生成・消滅を記述しています。電磁場と荷電粒子の生成・消滅を扱うには、フェルミオンfock空間と、その上で定義されるディラック場を導入します。一方でドレスト光子がかかわる現象は高エネルギー領域ではないため、荷電粒子の対生成・消滅を記述する必要はないと考えられます。その場合には荷電粒子側のヒルベルト空間は有限個の決まった個数の荷電粒子を表すヒルベルト空間 \mathcal{H} でよく、相互作用ハミルトニアンは $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の演算子として定義されることが考えられます。このようなモデルとして、パウリ・フィールツモデルと呼ばれるものが詳しく研究されています。ドレスト光子は一方で巨視的物質に囲まれたナノ物質と電磁場の相互作用をによって生じる、分散関係に広がりを持つ準粒子だと考えられます。そのような準粒子の生成・消滅を記述する場合に必要な枠組みは上述のオンシェル粒子の生成・消滅を記述するfock空間と本質的に異なる可能性があります。これを考察するためには、どのようなヒルベルト空間を用意するかという問いに答える前に、どのような(電磁場+ナノ物質系)の観測可能量のなす代数系とその上の状態そしてダイナミクスを指定すべきか、という問いを考察することが有用だと考えられます。また、ナノ物質系には非常に大きな数の自由度が関与するため、それらを完全に取り組んだモデルはあまりにも複雑すぎます。どのように必要な自由度を有効的に取り入れるかを今後考えていきたいと思っています。

謝辞

本研究は(社)ドレスト光子研究起点の助成を受けています。

参考文献

- [1] 新井朝雄, フock空間と量子場 上・下 (日本評論社), 2000.
- [2] 岡村和弥・小嶋泉, 無限量子系の物理と数理 (SGC), 2013.
- [3] 小嶋泉, 量子場とマイクロ・マクロ双対性 (丸善出版), 2013.
- [4] 大津元一, ドレスト光子 (朝倉書店), 2013.