

ドレスト光子と縦光子・不定形量

安藤 浩志 (千葉大理)

前回の記事では Coulomb ゲージにおける量子電磁場について紹介しました。これを(形式的な議論ですが)正準量子化の観点からもう一度見てみます。Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0^{-1} \rho(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

を4元ポテンシャル $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \mathbf{A})$ で書き換えます: $\exists \mathbf{A}, \exists U$ s.t.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi$$

より,

$$\Delta \phi = -\varepsilon_0^{-1} \rho - \nabla \cdot \partial_t \mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J} - \nabla \Lambda, \quad (2)$$

$$\Lambda := \partial_\mu A^\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-2} \partial_t \phi$$

となります。これは Lagrangian $\mathcal{L}^{\text{st}} = \mathcal{L}_{\text{Rad}}^{\text{st}} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_D$ の Euler-Lagrange 方程式から得られます。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Rad}}^{\text{st}} &= -\frac{\varepsilon_0 c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2), \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned}$$

が電磁場部分、

$$\mathcal{L}_D = \frac{i\hbar c}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - mc^2 \bar{\Psi} \Psi$$

が荷電粒子場 (Dirac 場) 部分、

$$\mathcal{L}_1 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \rho \phi = -J_\mu A^\mu, \quad J_\mu = (c\rho, -\mathbf{J})$$

が相互作用項です ($\rho = q\tilde{\Psi}^* \Psi$, $\mathbf{J} = qc\tilde{\Psi}^* \boldsymbol{\alpha} \Psi$) Euler-Lagrange 方程式を解くと A^μ で表した Maxwell 方程式 (1)(2) が得られます。 A^μ の共役運動量 $\Pi_{A^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu}$ との間に正準交換関係を課し (Hilbert 空間への表現を決め) て、量子化を行うのですが、 $\mathcal{L}^{\text{st}}$ に $\dot{\phi}$ が無いため、 A^0 の

共役運動量は0となり、このままでは量子化が行えません。Maxwell 方程式のゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi' = \phi - \partial_t \chi$$

に対する不変性を用いて Coulomb ゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を課して “量子化に不要” な自由度 ϕ を消去します。Maxwell 方程式を用いて A^0 を Lagrangian から消去し、その後 $\mathbf{A}$ の縦成分 A_t^1 を0と置いて量子化するという手順です。この場合 $\mathbf{E}_\ell = -\nabla \phi$ であり、 ϕ は Coulomb ポテンシャルに一致します。一方で A^0 も A^j 達と対等に扱って量子化を実行する方法もあります (詳しくは [1, 2, 3] をご参照下さい)。これを実行するには、 $\mathcal{L}_{\text{Rad}}^{\text{st}}$ にゲージ固定項と言われるものを適切に付加し、 A^0 の共役運動量が定義できるように、しかし Lorentz 条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ の下で A^μ の運動方程式が保たれるようにします。例えば次の様にします:

$$\mathcal{L}_{\text{Rad}}^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{Rad}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 (\partial_\mu A^\nu) (\partial^\mu A_\nu).$$

この時 $A_s := A_0 = \frac{1}{c}\phi$ 及び A_j ($j = 1, 2, 3$) の共役運動量は

$$\Pi_s = -\varepsilon_0 \dot{A}_s, \quad \Pi_j = \varepsilon_0 \dot{A}_j$$

となります。 Π_s に現れる負符号は Maxwell 方程式の構造、あるいは相対論的構造に依っており、避ける事ができません。この符号の影響を受け、電磁場部分の Hamiltonian の正定値性が破れてしまいます: $t = 0$ で $A_\mu(\mathbf{r}) = A_\mu^+(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathcal{A}_\mu(\mathbf{k}) = \mathcal{A}_\mu^+(-\mathbf{k})$ etc とし、 k -表示で適当な Hilbert 空間において CCR を要求します:

$$[A_\mu(\mathbf{k}), \Pi_\nu(\mathbf{k}')^+] = i\hbar \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3.$$

そこで消滅演算子 a_j, a_s を

$$\begin{aligned} a_j(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} (\omega \mathcal{A}_j(\mathbf{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_j(\mathbf{k})) \\ a_s(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}} (\omega \mathcal{A}_s(\mathbf{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0} \Pi_s(\mathbf{k})) \end{aligned}$$

¹関数 $V(\mathbf{r}, t)$ の3次元 Fourier 変換 $\mathcal{V}(\mathbf{k}, t)$ を $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_t$ と、 $\mathbf{k}$ と平行な縦成分と、直交する横成分に分解し、Fourier 逆変換を施して $V = V_\ell + V_t$ と表します。

とすると,

$$\begin{aligned}[a_i(\mathbf{k}), a_j^+(\mathbf{k}')] &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_s(\mathbf{k}), a_s^+(\mathbf{k}')] &= -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').\end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned}H_{\text{Rad}} = \int d\mathbf{k} \frac{\hbar\omega}{2} & \left[\sum_{i=1}^3 (a_i(\mathbf{k})^+ a_i(\mathbf{k}) + a_i(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k})^+) \right. \\ & \left. - (a_s(\mathbf{k})^+ a_s(\mathbf{k}) + a_s(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})^+) \right]\end{aligned}$$

となります。この負号問題を解消するためには4光子 A^μ のテンソル積 BosonFock 空間を考える際に正定値内積を放棄し、新たに不定計量 $(\cdot | \cdot)$ を導入し、通常の随伴を不定形量に関する随伴に置き換えます。さらにテンソル積 Fock 空間の中で、Gupta-Bleuler-中西-Lautrup の補助条件と呼ばれる条件を満たすベクトル達のなす空間に制限します (物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ と呼ばれます): k -表示で書くと、これは項 $\Lambda = \partial_\mu A^\mu$ が (相互作用がある場合でも) 波動方程式 $\square \Lambda = 0$ を満たす、という著しい性質を用いて、その正振動数部分で消される $\Lambda^{(+)} \Phi = 0$ ベクトル達、と表現されます。この量子化の手続きに於いては、 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ には s -光子も縦光子も現れませんが、例えば Coulomb ポテンシャルを記述する中間状態として現れ、重要な役割を果たします。 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ のみに物理的情報があると考えのではなく、 s -光子・縦光子と不定形量を伴った全体系を考察する事が今後のドレスト光子研究にとって有用ではないかと考えています。不定形量とそれに伴う不安定方向の成分が凝縮とマクロ化という現象の本質にかかわるという事は小嶋泉氏のミクロ・マクロ理論 [7] に基づいた同氏の講演 [6] で初めて明確にされました。私は量子電磁場のセクター構造 (無限自由度の量子系であるが故に、量子電磁場は沢山の表現と、その背後にある表現される量子場を区別し無ければいけません [4, 5, 7]) を理解する上で、不定形量空間の上の作用素としての A^μ 達の構造を調べることに興味を持って研究を行っています。

謝辞

本研究は (社) ドレスト光子研究起点の助成を受けています。

参考文献

- [1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupon-Roc and G. Grynberg, Photons and atoms, John Wiley & Sons (1997).
- [2] A. S. Wightman, L. Garding, Fields as Operator-valued Distributions in Relativistic Quantum Theory, Arkiv f. Fysik, Kungl. Svenska Vetenskapsak. 28, 129–189 (1964).
- [3] N. Noboru and I. Ojima, Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity. World Scientific Lecture Notes in Physics, 27. World Scientific Publishing (1990).
- [4] 大津元一編 ここからはじまる量子場 (朝倉書店), 2020
- [5] 岡村和弥・小嶋泉, 無限量子系の物理と数理 (SGC), 2013.
- [6] 小嶋泉, “マクロ化創発のパラドクス-鞍部点での安定不安定モードと Morse 理論-” 講演スライド (2017)
- [7] 小嶋泉, 量子場とミクロ・マクロ双対性 (丸善出版), 2013.