

# 量子ウォーカーはしご酒

瀬川悦生  
(横浜国立大学)

今年の2月に、世の中がCOVID-19による行動自粛の風潮になるかならないかのギリギリのときに、少し迷ったもののヨーロッパの交換留学プロジェクトで、量子ウォークの理論研究の第一人者の一人のステファナクさん(チェコ工科大学、プラハ)の所に、博士課程後期の学生さんと二人で訪問しました。大学は、プラハの観光地の中心で、モルダウ川のほとりにあります。ステファナクさんに紹介してもらった幾つかのお店は、一人当たりのビール消費量が世界一のことだけあり、ピルスナービールは絶品でしかも安価、また店員さんの愛想もよく、すっかり気に入ってしまいました。毎回大学から帰るときは、このようなお店についてトラップされてしまい、なかなか宿舎にたどり着けませんでした。

そのような中で、まさにピッタリの論文 [1] に出会いました。 $L$  段のはしご状のグラフがあります。その四つ角にはセルフープをくっつけます。(ご本人はこれは全ての頂点の次数を4に揃えるだけという単純な理由からということのようでしたが、実はこれが後で面白いことを引き起こします。) これを  $\Gamma_L$  とおきます。そして四つ角の一つに「落とし穴」を作ります。この落とし穴付きのはしごグラフ上に量子ウォーク (QW) を走らせます。落とし穴の対角の位置にあるところから走らせて、ひとたびその落とし穴に落ちたら、二度と出てこられません。問題は、「無限ステップ経過した時に、ウォーカーは  $\Gamma_L$  に存在するか?」です。これがもしランダムウォークだったら、ランダムウォークはある有限時刻で必ず落とし穴に到達するから、答えは「ノー」です。一方で、この論文によると QW の場合は「イエス」となり、この論文のタイトルにある通りの非直観的な結末になります。さらにこの論文の数値計算による結果を注意深く見ていくと、もっと奇妙なことが見えてきました。生存確率を  $\eta(L)$  とします。すると、 $\eta(L)$  は十分に大きなはしごのサイズ  $L$  に対して、0 ではない値に収束するのですが、その収束の仕方が単調減少になっているのです。路が長ければ、それだけ路の途中に、素敵なお店の誘惑に多く遭うのだから、なかなか目的地にたどり着けない、したがって、単調増加ではないか? プラハのロックダウンする寸前の夜の市街地をさんざん “はしご” して楽しんでいた私達にとっては、これは驚きでした。\*

QW の生存確率  $\eta(L)$  の性質を整理しておきましょう。

- (1) 生存確率  $\eta(L) > 0$ ; (2)  $\eta(L)$  は十分大きな  $L$  に対して単調減少。

ここで性質 (1) について、これまでの研究との関係から少し説明を付け加えさせてください。 $\Gamma_L$  上の QW の時間発展行列から、落とし穴に関する部分を切り落とした部分行列を考えます。性質 (1) はその固有値の絶対値が1である固有空間が起因しています [2]。つまりこの固有空間と初期状態とのオーバーラップがある限り、必ず性質 (1) は保証されるのです。与えられたグラフにサイクルさえあれば、この固有空間が存在するという便利な判別方法があります [3]。したがって今着目しているグラフ  $\Gamma_L$  ははしご状になっているので、 $L$  に比例し

---

\*その2週間後位に街も大学もほぼロックダウンになったので、切り上げて帰国する形になりました

てサイクルが増加し、生存確率を保証する固有空間の存在感がより強まるわけです。そうになると、ますます性質 (2) は奇妙に思えてきます。実は、ドレスト光子の実験においても、外から光をナノ微粒子に照射すると、中にいるナノ微粒子数が多いほど、より出力信号の値が大きくなるといった (2) と似たような現象が起きています [4]。QW の設定におけるはしごの幅と長さがナノ微粒子の配列方向に関係していることを示唆しているようにも見えます。その辺りを今後追求していきたいと思います。

それではいよいよ本題の (2) に関して考えていきます。実は [3] では扱っていない設定が  $\Gamma_L$  には存在しており、ランダムウォークの直感に引きずられ、それを見落としていたのです。それはセルフループの存在でした。このセルフループの寄与で生まれる固有空間は、より一般的なグラフの設定においても (i) セルフループ間の最短経路パスで特徴づけられる; (ii) 生存確率への寄与の強さは、このパスの長さに反比例することが、この研究で明らかになりました。では、これらを踏まえて、仕上げて、(1) と (2) で考察した固有空間と初期状態とのオーバーラップを足し合わせて、生存確率を見てみましょう。すると、はしごの長さ  $L$  が大きいときには、漸近的に次のようになります。

$$\eta(L) \sim C_{Cycle}(1 - \lambda^{2L}) + C_{SelfLoop}/L.$$

但し、 $C_{Cycle}$ 、 $C_{SelfLoop}$ 、 $\lambda$  はそれぞれ正の定数で、 $\lambda$  は真に 1 以下です。また、右辺の第一項、第二項はそれぞれサイクル、セルフループによる寄与を表しています。仮にセルフループがない場合を考えてみましょう。すると、第一項だけになるわけですが、この場合、生存確率が単調に増加することが解り、(1) で得られた直観が復元されます。その一方で、セルフループ追加という“小さな”グラフの構造に摂動を加えるやいなや、第二項が出現します。そして生存確率に対して  $L$  に、“微分”をとると、 $L$  が大きいときには微係数が負になるので、これで単調減少になることがこれで示されたことになりました。

夜の街をさらに連想する情報が得られます。良く眺めると「第一項、第二項は  $L$  に関して、それぞれ指数関数、多項式のオーダーで収束する」ということに気が付きます。つまり、ほんの数個のセルフループによって、生存確率の  $L$  に関する収束のスピードが指数関数的に遅延させられているのです。まるで「落とし穴があるから気を付けて」と注意喚起しているかのようです。いやむしろ、路上に数人“悪い”呼び込みが強力な人がいて、「あなたの家は落とし穴、もっとここで遊んでいけば？」という誘惑に乗り、帰宅を遅らされているとしたほうが、よいのでしょうか？どちらがいいのかは皆さんにお委ねします。このセルフループの果たす役割は [4] によるドレスト光子の実験の文脈でも何かしらの解釈をとることができるのか？もしあるとすればどのようなものなのか？今の所、夜の街のたとえでしかできていませんので、楽しい今後の課題になっています。

## References

- [1] J. Mares, J. Novotny, M. Stefanak, I. Jex, Phys. Rev. A 101.032113 (2002)
- [2] Yu. Higuchi and E. Segawa, J. Phys. A: Math. Theor. 52 (39) (2019).
- [3] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato, E. Segawa, J. Funct. Anal. 267 (2014) pp.4197-4235.
- [4] W. Nomura, T. Yatsui, T. Kawazoe, M. Naruse, and M. Ohtsu, Appl. Phys. B 100 (2010) pp.181-187