

# 電磁ポテンシャルとドレスト光子

～ 電場・磁場での記述の破綻が現れるとき ～

坂野 齋

山梨大学工学部 \*

(Dated: April 28, 2021)

電磁場の本質的自由度は電場・磁場ではなく電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャル）です。この事実を印象づける現象として、超伝導体のマイスナー効果 [1, 2], コヒーレント電子系のアハラノフ＝ボーム効果 [3] は有名です。これらの系を含め、物質と電磁場の関わる系のハミルトニアンや作用積分の記述には、電場・磁場ではなく電磁ポテンシャルを用います。ですので、電磁ポテンシャルの必須性は、本来的、普遍的なもので、そこそこにある系で露わになってよいものです。でも、現実はそうでもないように見えます。そこには、電磁ポテンシャルの必須性が見えにくくなる物理的原因と、電磁ポテンシャルに含まれるゲージ自由度を厭い、電場・磁場による記述を好ましいと思う心理的原因とがあります。

この記事では、「光学の長い歴史の中で電場・磁場による記述が、どうして成功を収めてきたのか（電磁ポテンシャルの必須性がどうしてよく見えないのか）」、「電磁ポテンシャルの必須性が露わになるのはどのような場合か」を明らかにしたいと思い、以下の事を述べます。伝統ある光学に馴染んでこられた方々にとりまして、ドレスト光子＝内在電磁場を考える端緒になれば幸いです。

- 光学の主な対象である、物質から離れた遠隔電磁場と物質励起と共鳴する電磁場では、電磁ポテンシャルの必須性が隠され、電場・磁場での記述が可能になります。
- 逆に、従前の光学の対象となり難くかった、物質の近傍にある、または、物質に内在する電磁場で物質励起と非共鳴な場合は、電磁ポテンシャルの必須性が顔を出します。
- この電場、磁場による記述の破綻の原因は、物質系の非相対論性です。
- ドレスト光子＝内在電磁場が関わる非共鳴条件下の非線形現象が、電磁ポテンシャルの必須性を露わにしてくれる可能性があります。
- おしまいに、電磁ポテンシャルより電場・磁場での記述を好ましいと思う心理的原因を小

---

\*Electronic address: [banno@yamanashi.ac.jp](mailto:banno@yamanashi.ac.jp)

さくするための3つの事について記します。

(1) ゲージ自由度の任意性をどうするか?, (2) 古典系における電磁ポテンシャルの必須性, (3) 分極・磁化, 誘電率・透磁率の歴史的役割

冒頭で述べたマイスナー効果, アハラノフ=ボーム効果は磁場の概念の破綻を意味します。ここでは, 物質に近接する, または, 内在する電磁場において, 電場の概念が破綻することを, 参考文献 [4] に基づき説明します。

電場は, その縦成分と横成分の和です<sup>1</sup>。縦成分は電荷密度を源泉としクーロンの法則に従います。一方, 横成分は電流密度の横成分を源泉としアンペール=マクスウェルの法則とファラデーの法則に従い, 磁場を伴います。電場の縦成分と横成分は, 源泉が異なり, 従う法則も異なるので, それらが共存するナノ構造に近接する, または, 内在する電磁場を2つの成分の和である「電場」で記述することは不合理です。一方, 物質から離れた場所へ電場の縦成分は伝搬しないので, 遠隔場では「電場」は横成分のみとなり, 異質な2成分共存による不合理は免れます。光学が対象とするのは「電場」での記述が妥当になる遠隔場です。これは, 光学の長い歴史の中で電場・磁場による記述が成功してきた1つの理由です。

さらに, 重要なことは, 電場の縦成分と横成分を原因とした物質の応答が異なることです。ナノ構造を光源とし, その電場の縦成分と横電場を含む近接電磁場を浴びる第2の物質の応答を考えましょう。電場の縦成分と横成分の本質的自由度は, それぞれ, スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの横成分であり<sup>2</sup>, これらは, 物質の応答を支配するハミルトニアン中に異なる形で含まれます; ベクトルポテンシャルは運動量に伴い2次式で, スカラーポテンシャルは1次式で含まれます。これにより, スカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルの横成分に対する物質の応答に違いがあることがわかります。

さて, ハミルトニアンの中で, スカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルの依存性が異なるのは物質系を非相対論系と考えているからです。具体的には, 電子より質量が大きい, ナノ構造や原子核の平均位置が静止しているような座標系に固定し, この座標系で電子の速度が光速より大分小さいと考えているからです<sup>3</sup>。

<sup>1</sup> 縦成分と横成分は, 縦波と横波を一般化したものです。電場など任意のベクトル場は縦成分と横成分の和に分解できます。縦成分は(微分演算の)回転が0になる成分, 横成分は(微分演算の)発散が0になる成分です。高校や大学の教科書に登場する静電場は, 「電場の縦成分」, ファラデーの法則に従い磁場の時間変化を原因として生じるものは「電場の横成分」です。電磁気学の教科書では, 電場の縦成分も横成分も「電場」という同じことばで表すことが多く, 伝統的な光学からの概念的進歩の足かせになっているように思います。

<sup>2</sup> 簡単のためにクーロンゲージで考えます

<sup>3</sup> 相対論系では電荷密度と電流密度, スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルはローレンツ変換により互いに混じり合い, 電場の縦成分, 横成分の区別は意味を持たないものになります。

この段階で、「電場」を原因として誘電率で応答を記述することは、論理的に瑕疵があることはわかれると思います。遠隔場についてこの瑕疵がなくなることは先にのべました。さらに、物質励起と共鳴にある電磁場を扱う場合、この瑕疵がみえなくなり、伝統的な光学において、電場・磁場での記述が有効になる物理的な仕組みがあるようなのです。

ここから先は具体的で限られたモデルの話です。電磁ポテンシャルに対する線形感受率を求め、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを浴びる2準位系に適用すると、共鳴項と非共鳴項という2つの寄与が現れます；この非共鳴項が非相対論性の足跡です。

共鳴項は2準位系の励起エネルギーに合う周波数のスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルを与えると増大する寄与です。共鳴条件下の共鳴項は非共鳴項を凌駕し、主要な寄与となります。その共鳴項において、スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルの原因を、電場の縦成分、横成分の原因として書き直すことができます。その際、対応する感受率の表式は（なんと！）共通のものになります。つまり、共鳴条件に近いとき、電場の縦成分と横成分の2つの原因に対する応答が共通となり、2つの原因を足し算した「電場」を原因としても正しい応答となります。光学で強い関心を惹く共鳴現象の記述には、たとえ、2成分の異質な原因が共存していても「電場」そのものを用いて不都合は露呈しません。

非共鳴項にはベクトルポテンシャルのみが関わり、物質の励起エネルギーとは無関係な寄与です。言わば、横電場にのみある応答ですので、光学であまり関心を惹かない非共鳴条件の下で電場の横成分と縦成分の違いが現れます。違いを見るという意味で、縦成分（スカラーポテンシャル）と横成分（ベクトルポテンシャルの横成分）が原因として共存している前提が必要ですので、電場の概念の破綻は、物質に近接した、または、内在した電磁場への非共鳴応答に現れると言えます。参考文献[4]では、現実的なパラメータで電場の縦成分と横成分に対する線形応答をシミュレーションしました。その違いは質的というより小さな量的な差であり、実験結果として露わに見ることは難しそうでした。現実的なパラメータの下では、非共鳴項と共鳴項が同程度の寄与をし、巨大化しない非共鳴項の特徴を捉えにくいためと考えられます。

いままで、述べてきたことを光学に焦点をあててまとめると次のようになります：

- 光学では、遠隔場を主な対象の1つとしてきました。遠隔場としての「電場」には縦成分がなく、異質な2成分を加算する不合理を免れてきました。
- 光学では、有用な共鳴現象に強い関心もたれてきました。共鳴条件が満たされれば、たとえ、電場の縦、横成分が共存しても「電場」の概念は健全に働くことが、限られたモデルから示唆されます。
- 非共鳴条件下で現れるはずの、電場の縦成分、横成分に対する応答の違いは、線形応答の

範囲では、実際的に捉え難いことが限られたモデルから示唆されます。

以上のことから、光学の長い歴史において、電磁ポテンシャルの必須性が露わにならなく、電場・磁場の概念が健全に働いてきた物理的事情を理解できます。また、近接場光学において、共鳴、または、非共鳴条件下で、「電場」を原因とみなし、誘電率を用いて応答を記述することは、有限差分時間領域法（FDTD法）などを適用して盛んに行われていますが、電磁ポテンシャルの必須性が露わになるようなことがなかった事情も理解できると思います。

それでは、電磁ポテンシャルの必須性が露わになるのはどのような場合でしょうか？それはドレスト光子＝内在電磁場が関わる非共鳴の非線形現象と考えられます。実際、非線形感受率を求めてみると、線形感受率と同様に、共鳴項の外に系の非相対論性を起源とした非共鳴項の寄与があります [5]。非線形応答の非共鳴項はベクトルポテンシャルの自己相関の2次を含み、増大する可能性があります。言わば、波数が整合して巨大化する運動量共鳴ともいえるようなことが期待できます。

実験的にも、川添・大津のフォトンブリーディングという手法で、シリコンから発光素子を作製したことは、非共鳴条件下で行われています [6-8]。さらに、川添・大津らは光学フォノンの関与も実験的に示しています [9-11]。光学フォノンも内在電磁場を伴いますので、光とのインタープレイは非線形応答と解釈できます。目下、ドレスト光子＝内在電磁場が非線形応答の非共鳴項を介して寄与するシナリオに基づき研究を進めています。

さて、最後に、電磁ポテンシャルによる記述への心理的抵抗が小さくなり、世に認知されることを願って、3つのことを書かせていただきます：

(1) ゲージ自由度の任意性をどうするか？：電場・磁場ではなく電磁ポテンシャルを用いようとしたときに、ゲージ自由度の任意性は、「電場や磁場のようなゲージ変換に対する不変量こそ、物理量である」ということに反するように思えます。実際、電磁ポテンシャルはゲージ変換不変ではありません。でも、ゲージ変換はベクトルポテンシャルの縦成分とスカラーポテンシャルに関するものなので、ベクトルポテンシャルの横成分はゲージ変換不変量です。この不変量が露わになったのが、冒頭で述べた、マイスナー効果やアハラノフ＝ボーム効果といえます。

非相対論系では電磁ポテンシャルをクーロンゲージに固定することはゲージ自由度の任意性を取り除くことを動機としてよくなされます。結果としてベクトルポテンシャルをゲージ変換不変量に対応づけることになり、当初の動機以上の有用性を得ています。教科書の光学応答の記述の大部分はそのような扱いであり、この記事でもそのようにさせていただきました。ゲージをクーロンゲージに固定することはゲージ自由度の相応しい扱いです。

しかし、物質の応答の原因として電磁ポテンシャルを考えるときに、ゲージ自由度を固定することが議論を深めるとは限りません。電磁場を原因、源泉を結果とする感受率を求める場合、本質的原因として、電磁ポテンシャル、本質的結果として誘導電荷密度・誘導電流密度を採用するのは理に適っています。その際、原因側に含まれるゲージ自由度が応答に影響しない仕組みを感受率が備えているべきです。それは、結果側の電荷保存則が満たされる仕組みを感受率が備えることと同じだけの必要性があります。なぜなら、電荷保存則と作用積分のゲージ変換不変性はネーターの定理により表裏の関係だからです。この場合、ゲージ自由度の任意性は扱いつらさをもたらすというより、理論の整合性検証の機会をあたえてくれます。

(2) 古典系における電磁ポテンシャルの必須性：電磁ポテンシャルに実験的証拠から市民権を与えてくれたマクスナー効果やアハラノフ＝ボーム効果は「量子論」の特別な現象と位置づけられています。この記事では、近接場光学系やドレスト光子系という広範な系の非共鳴応答に、電磁ポテンシャルの必須性が潜在・遍在していることを量子論の枠組みで示しました。

電磁ポテンシャルの必須性は第1義的にはハミルトニアンや作用積分が電磁ポテンシャルを使って記述されることによります。解析力学の観点からは、量子論に対応する古典論のハミルトニアンの表式は同じで、違いは、量子論の括弧式を古典論のポアソン括弧式に置き換えるだけです。従って、電磁ポテンシャルの必須性は古典系にあってもおかしくないのです。

ここで、古典力学のニュートン方程式で、ローレンツ力が電場と磁場で書かれることから電磁ポテンシャルの必須性をいぶかしむかもしれません。でも、量子力学に互換な古典力学のニュートン方程式は正準運動量の時間変化を追うものです。正準運動量にはベクトルポテンシャルを含むので、その時間変化の原因である「力」には電磁ポテンシャルが登場します。

私は古典力学系での電磁ポテンシャルが必須になるよい例を思いつきませんが、教育的な例があれば、電磁ポテンシャルの必須性を広く認知してもらおう糧になるように思います。

(3) 分極・磁化、誘電率・透磁率の歴史的役割

電場・磁場という概念は、場の自由度の数え上げからも電磁場の自由度として冗長であることを次のように理解できます：電磁場の源泉は、電荷密度（1成分の場合）と電流密度（3成分の場合）の合わせて4成分から、電荷保存則の1成分を減じた3成分です；電荷保存則は、電荷密度が決まれば電流密度の縦成分（1成分）は実質決まることを意味しています。源泉が3成分ですので、結果である電磁場も3成分の自由度です。それは、スカラーポテ

ンシャル（1成分）とベクトルポテンシャル（3成分）の合わせて4成分から、勝手に決めてよいゲージ自由度の1成分を減じた3成分であることがバランスのよい記述です。ところが、光学で重用される電場・磁場は6成分あり、冗長な自由度を含み源泉と単純な因果関係で結べません。

光学の長い歴史の中では、6成分の電場・磁場を重用して物質の光学応答の原因とみなし、6成分の分極・磁化を結果とし、その因果関係を誘電率・透磁率で結び記述してきました。分極・磁化は誘導電荷密度・誘導電流密度の身代わりで冗長自由度を含みます。この伝統的な方法の因果関係を担い、構成方程式として6条件の等式をもたらす誘電率・透磁率は、本質的な光学応答を記述する外、冗長自由度を縛る働きもしています。電場・磁場、分極・磁化という概念を使った、このような光学応答の記述は、理に適ったものといえ難いですが、そうならざろう得ない事情があったと考えられます。

このような光学応答の記述をもたらした電磁気学・光学の発展は、ディラックがデルタ関数を発明する以前でした。当時は遮蔽のために界面に生じる誘導電荷密度・誘導電流密度の分布にデルタ関数を使うことができなかつたので、誘導源泉の特異性を階段関数の範囲で抑えるために、分極・磁化を導入して電場・磁場との関係を結び、電磁場への応答を記述したと考えることはできないでしょうか？

ゲージ自由度に対する過度の心配をなくすこと、古典系で電磁ポテンシャルの必須性を明らかにすること、電場・磁場、分極・磁化、誘電率・透磁率での記述の歴史的必然性を理解することは、近接電磁場やドレスト光子=内在電磁場を電磁ポテンシャルで記述することの心理的抵抗を和らげ、光学の概念的進歩に側面から寄与するように思います。

- 
- [1] F. London. *Superfluids vol.1, Macroscopic Theory of Superconductivity*. Dover Publications, Inc., New York, 1950.
  - [2] F. ロンドン and 井口家成（訳）. *超伝導のマクロ理論*. 講談社, 東京, 1974.
  - [3] Y. Aharanov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485, 1959.
  - [4] I. Banno. Response theory supporting dressed photons. In T. Yatsui, editor, *Progress in Nanophotonics*, volume 5, chapter 6. Springer International Publishing, 2018.
  - [5] I. Banno. Theory of single susceptibility for near-field optics equally associated with scalar and vector potentials, 2018. <https://arxiv.org/abs/1807.10992v3>, (also in Off-shell archive,

<http://offshell.rodrep.org>, DOI: 10.14939/1809O.002.v1).

- [6] T. Kawazoe, M. A. Mueed, and M. Ohtsu. Highly efficient and broadband Si homojunction structured near-infrared light emitting diodes based on the phonon-assisted optical near-field process. *Appl. Phys. B*, 104:747–754, 2011.
- [7] Minh Anh Tran, Tadashi Kawazoe, and Motoichi Ohtsu. Fabrication of a bulk silicon p–n homojunction-structured light-emitting diode showing visible electroluminescence at room temperature. *Appl. Phys. A*, 115:105–111, 2014. DOI 10.1007/s00339-013-7907-9.
- [8] M. Ohtsu. *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers*. Springer International Publishing, Switsland, 2016.
- [9] N. Wada, M. A. Tran, T. Kawazoe, and M. Ohtsu. Measurement of multimode coherent phonons in nanometric spaces in a homojunction-structured silicon light emitting diode. *Appl. Phys. A*, 115:113–118, 2014. DOI 10.1007/s00339-013-7906-x.
- [10] M. Yamaguchi, T. Kawazoe, and M. Ohtsu. Evaluating the coupling strength of electron–hole pairs and phonons in a  $0.9\mu\text{m}$ -wavelength silicon light emitting diode using dressed-photon–phonons. *Appl. Phys. A*, 115:119–125, 2014. DOI 10.1007/s00339-013-7904-z.
- [11] T. Kawazoe, K. Nishioka, and M. Ohtsu. Polarization control of an infrared silicon light-emitting diode by dressed photons and analyses of the spatial distribution of doped boron atoms. *Appl. Phys. A*, 121:1409–1415, 2015. DOI 10.1007/s00339-015-9288-8.