

〈量子場〉とは何か：圏代数と圏上の状態による定式化

西郷 甲矢人 (長浜バイオ大学)

E-mail: h.saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

以前、オフシエル科学の基盤について考えるためには「状態とは何か」といった根本的な問題について再考する必要がある、と述べた（西郷甲矢人『〈状態〉とは何か』、オフシエル科学フォーラム、2020年）。そこでは、系と環境のインターフェイスとしてのあり方である状態を、「物理量の代数」から「複素数」への写像（各物理量にその期待値を対応させる「期待値汎関数」）として捉える考え方について説明した。また、オフシエル科学における「物理量の代数」としては「圏代数」が適切であろうことを、物理系のダイナミカルな特性が「圏」としてとらえられることを踏まえて議論した（『〈物理量の代数〉とは何か：圏代数による定式化へ』、オフシエル科学フォーラム、2021年）。今回はそれらの議論をふまえつつ、いよいよオフシエル科学の主人公というべき量子場の概念に切り込んでいこう。

量子場は物理学における根本概念であり、相対論と量子論の統合を目指すなかで登場した（もちろん非相対論的文脈も重要であるが、これは対称性の構造が異なるだけで一種の「変形された相対論的構造」とみなすことが可能である）。しかし、4次元ミンコフスキー時空上のポアンカレ群に共変的な相互作用する量子場の存在は証明されていない。量子場への公理的アプローチにおいては、概念的な明晰化を通じ、ハークの定理（「相互作用表示は相互作用のないときのみ意味がある」）などの不可能性定理が示されてきた。

雑に言えば、相互作用する量子場を捉えるには、われわれが「当然だ」と思っているような枠組みを超える必要がある。本稿ではわれわれの提起する新しいアプローチを解説したい。核心となるアイデアは、量子場を rig (semiring すなわち半環とも呼ばれる、足し算と掛け算が定義されている代数系。われわれは「数系」とよぶ) 上の「圏代数」として捉えることである（もちろん応用上、数系としては複素数体やその上の代数が重要であるが、必ずしも加法の逆を持たない数系にも目配りしておく）。圏代数は圏構造と整合的な非可換代数であり、これとその上の線型汎関数としての「圏上の状態」を用いることで、「相対論的」構造と「量子論的」構造とが直接的につながる。

相対論の本質は可能な事象たちの間の可能な関係性の総体である。実際、未来と過去を識別可能なローレンツ多様体が共形同型であることは、その事象間に「未来向きの因果的な曲線が存在する」ことをもって定義される半順序集合が同型であることと同値であることが知られている (Malament, D. B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime. *Journal of Mathematical Physics* **1977**, 18(7), 1399–1404)。こうした事実を踏まえて時空への順序構造的アプローチも試みられている (Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D. and Sorkin, R. D. Space-time as a causal set. *Physical review letters* **1987**, 59(5):521)。

しかし、(相互作用する現実の) 量子場のオフシエルな本質をとらえるには、狭い意味での因果的關係のみならず、空間的に離れた事象間の関係をも含めて考える必要がある（ちなみに、「因果的關係とは何か?」というのもきわめて重要な問題であり、決定論との違いやオンシエル性との関係など述べるべきことが多々あるが、これらはいずれ別の記事で詳しく取り上げる予定である）。

では、既存の枠組みをいかに一般化すべきか？われわれのアプローチは、順序構造と群論的構造の双方の一般化である「圏」を一般化された意味での「相対論的構造」として考えることである。より具体的に言えば、われわれは「部分的な対合構造をもつ因果的圏」という概念を導入し、

これが一般化された相対論的構造そのものであると見なすのである。

この「一般化された相対論的構造」と量子論的構造としての「非可換確率構造」を結びつけるために、圏の構造を反映する（複素数体などの）数系上の非可換代数を考えるのが自然である。すでに前の記事において説明したように、圏代数こそまさにこのような「圏の構造を反映する」非可換代数なのであった。これこそが「量子場」だというのがわれわれの基本的なアイデアなのである。

以上の議論は、なぜわれわれが量子場のモデル化に圏代数を用いるのかを簡単に説明する。圏代数は圏構造を反映した共変性や局所性のような豊かな構造を持っている。これらの豊かな構造に着目することにより、先行する有力な量子場へのアプローチである代数的量子場理論（AQFT）や位相的量子場理論（TQFT）などの概念的な関係性も見えてくる。

さて、量子場を数系上の圏代数であると同定したとして、量子場の状態はどのように考えるとよいだろうか。すでに前々回の記事で詳述したように、一般に、複素数体上の*-代数の上の状態の概念は、正規化された正值線型汎関数として定義される。われわれはこれを一般の数系上の対合をもつ代数に拡張することができる。圏が対合構造を持てば、その圏代数も対合をもつ。この圏代数上の状態を量子場の状態と考えよう。なお、われわれは「圏代数上の状態」を「圏上の状態」と呼ぶ。これは言葉の濫用ではあるが、次に述べる定理からある程度正当化できる。

定理：もし圏の対象が有限個なら、圏上の状態は圏上のある種の関数（射に数系の元を対応させる、半正定値関数）と一対一対応する。

これは、亜群についての先行研究（Ciaglia, F. M., Ibort, A. and Marmo, G. Schwinger's Picture of Quantum Mechanics III: The statistical Interpretation. *Int. J. Geom. Meth. Modern Phys.* **2019**, 16(11): 1950165）の一般化となっている。

より一般に、そのサポートが有限個の対象をもつ圏に含まれるような状態に関しては、状態を定めることと射の重みづけをすることが同値ということになる。そのような意味での有限性をもつ状態を考えることにより、有限自由度的な「量子力学系」を量子場の一様相として捉えなおすことが可能である。この見方は、量子論の基礎やドレスト光子研究をはじめとするオフシエル科学に新しい光を投げかけるに違いない。

興味をお持ちの読者は、以下の論文にも目を通していただくとありがたい（本稿は以下の論文の一部をもとにしたものである）。

- Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, 13 9, 1727.
<https://doi.org/10.3390/sym13091727>
- Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, 13 7, 1172.
<https://doi.org/10.3390/sym13071172>