

ドレスト光子の個数の期待値と量子ウォーク

齋藤 正顕 (工学院大学)*

ドレスト光子 (DP) の量子ウォーク (QW) モデルが天津先生 [4], 瀬川氏によって提案されています. 天津-瀬川-結城 [5] らによる数値計算により, その挙動も徐々に解明されつつあります. 最近, この数値計算が結城氏により高速化され, 様々なサイト数の場合に QW モデルをシミュレーションすることが可能となりました. 詳細については, 今年秋の応用物理学会で何うことができると思います [5]. 実は私も, その計算について少しお手伝いさせていただく機会がありました. はじめは, あまり使用していないワークステーションが手元にあり, これを計算に充てることで少しお手伝いできればという軽い気持ちで申し出ました. しかし, 結局のところ, 結城氏に手取り足取り教わることとなり, 返ってお手間をとらせることになったのではと恐縮しています. まずはその顛末について少し述べさせていただきます. まず, 手元のワークステーションの GPU を使って計算するための設定 (必要なアプリのインストール等) が, 大学のネットワーク設定に阻まれ, そこそこ大変でした. やっと設定ができ, いざプログラムを走らせると, 謎のエラーが出て, その度に結城さんにいろいろと教えていただきました. しかし, 最終的には, 手元ワークステーションの GPU は非力で, ほとんど戦力にならないことが分かりました. それで, 計算は手元のワークステーションを使わず, Google Colab という Google のサービスを使って計算することになりました. Google Colab は, プログラムを Google Drive に置いて, Google のコンピューターで実行させるというものです. 使える GPU は約 12GB と性能もなかなか良いです. 実行時間などにいくつか制限もありますが, スマホで Google Drive を見ると計算の進捗状況も確認することができて便利です. この進捗状況の確認はそれ自体が結構楽しく, 仕事や移動の合間に気になってつい見えてしまうといった状況でした. それにしましても, 結城氏の膨大な計算と, 天津先生, 瀬川氏の深い洞察により, DP の量子ウォークモデルの挙動が解明されつつあることは大変興味深く, これから大きく発展する予感を感じさせます. 私もわずかではありますが, 計算の様子を観察して, DP の量子ウォークモデルについて少し分かった気になりました. 分かった気になっただけであり, あくまでも手ごわいモデルであることは (少なくとも私にとって) 確かです.

さて, 話題を変えて, ここからは「DP の個数の期待値」という視点から, 量子ウォークモデル以前の DP の理論 [3] と QW の類似性について見ていきます. DP とフォノンとの結合定数 χ が 0 のとき, サイトの個数 (バネの個数) $N \rightarrow \infty$ での DP の個数の期待値は

$$\langle N_i(t) \rangle_j = \langle \psi_j | N_i(t) | \psi_j \rangle = \{ J_{j-i}(2Jt) - (-1)^i J_{j+i}(2Jt) \}^2 \quad (1)$$

となります [3]. ここで, J は跳躍定数で, $J_n(t)$ は第 1 種ベッセル関数 (J-ベッセル) です. これと同じような式が QW にもありました (今野先生の結果 [1] [2]). \mathbf{Z} 上の連続時間 QW で遷移行列 A が \mathbf{Z} の (無限グラフとしての) 隣接行列で与えられているとします. このとき, 時間発展行列 $U(t) := \exp(itA/2)$ の (l, m) 成分が

$$U(t)_{l,m} = i^{|l-m|} J_{|l-m|}(t), \quad (l, m) \in \mathbf{Z}^2, t \geq 0$$

* e-mail: saito.seiken@cc.kogakuin.ac.jp

で与えられます. このことから, サイト $k \in \mathbf{Z}$ で観測される walker の確率は

$$P(k, t) = \langle \Psi(k, t) | \Psi(k, t) \rangle = J_{|k|}(t)^2 = J_k(t)^2. \quad (2)$$

となります. (1) と (2) はベッセル関数の 2 乗が出てくるという意味で極めて良く似ています. もちろん, DP における χ や J の役割を考えると, 量子ウォークや量子確率論と親和性が高いことは明白なのですが, 粒子数の期待値や確率の観点からもそれが確認できると個人的には納得しています. DP と QW が出会って, より DP にカスタマイズされた QW の理論 [4] が始まりつつありますが, この理論において, 粒子数の期待値がどのように記述されるかという問題に関心を持ちつつ研究を注視しております.

参考文献

- [1] N. Konno, *Limit theorem for continuous-time quantum walk on the line*, Phys. Rev. E (3) 72 (2005), no. 2, 026113, 7 pp.
- [2] 今野紀雄, 「量子ウォーク」, 森北出版, 2014.
- [3] 大津元一, 「ドレスト光子 –光・物質融合工学の原理–」, 朝倉書店, 2013.
- [4] M. Ohtsu, A Quantum Walk Model for Describing the Energy Transfer of a Dressed Photon, preprint, 2021.
- [5] 大津元一, 瀬川悦生, 結城謙太, 「量子ウォークモデルによるドレスト光子エネルギー移動の数値計算」, 2022 年第 83 回応用物理学会秋季学術講演会.