圏としての時空

西郷甲矢人（長浜バイオ大学）

前回執筆したオフシェル科学フォーラム「非可換性はどこからくるのか」の末尾付近で私は次のように述べた。

> どうやら、オフシェル性とは「点の集まりには還元できないような」時空の「矢印」的な側面そのものであって、まさにそれが非可換性の源なのではないかという気がしてくる。

このことについて今回はより詳しく説明していく。

現代において、時空という概念はそんなに革命的なものとは考えられていないかもしれない。しかし、時間と（物理的な意味での）空間とを原理的に切り離しえないものとして扱うという考えが物理においてこれほど本質的であることは、相対論の成功によって初めて浸透したと言ってもよいであろう。

その成功を可能にしたのは、（数学における）空間概念の成熟であった。空間を図形たちの「静的な容れ物」ではなく「動きの場」として捉えるという思考の深化である。「動き」の概念は「群（ぐん）」として捉えられ、空間はその群が「作用」するなんらかの構造が定義された）「点の集合」として捉えられるということである。ここで群が「作用する」というのは、群の要素一つ一つが、この点の集合からそれ自身への可逆な対応づけとして整合的に解釈できるようになっていることをいう。より平たく言えば、群の各要素がその空間における「動き」に他ならないと思える状況である。

このような思考の深化の意義は、いくら強調してもしすぎることはない。ただその上で、空間が結局は点集合であり、動きがその点集合から自身への可逆な対応づけ（写像）と対応づけられるという考えは、ドレスト光子研究をはじめとする「オフシェル科学」の展開においてはもはや桎梏とすらなりうるのではないか、と私は最近考えるようになった。

というのも、この見方が「場」を「点集合上の関数」として捉えるべしという教義に必然的に結びついてしまうからである。ファラデー以来、場は物理学における最大級に重要な概念であるが、それをいざ言葉で説明しようとすると例えば「空間（時空）になんらかの量が分布している状況」というような甚だ心もとない表現になってしまう。それを精密にするために数学的言語に訴えると、（空間を点集合と思う限り）「点集合上の関数」と考えざるをえない。ところがこのようにすると、点集合上の関数としての「場の量」について整合的な積としては「各点ごとの積」を考えるのが自然であり、これは可換（積の順番によらない）となる。しかしこのような「可換」な代数だけでこの世は語れないというのが量子論の教えるところなのだから困る。

そこで、各点に対して「非可換な量」としての作用素を対応させたものを考えれば良いのではないか？というのがオーソドックスな考えで、非常に大雑把に言えばこれが現代の「標準的な量子場の概念」に対応するのであるが、数学的に厳密に言い表そうとすれば多くの物理学者にとって縁遠い多くの道具立てが必要となるし、しかもそうやって数学的に整理されるものを探せば結局は相互作用しない場＝「自由場」しか見つからないという話になる。兎角に人の世は住みにくい。

何か根底的なところから見直す必要があるはずだ。私の考えでは、ものごとを最終的には「点集合上の関数たちと各点ごとの積の構造」に還元できると考える科学＝「オンシェル科学」を超えた、「オフシェル科学」を構築する必要があるのだ。「点集合上の関数の値」の全体としてとし

て非可換な「作用素のなす代数」を考えることも許されるから、古典物理学の枠は超えうるものの、相互作用を真正面から捉えるには至らないのがオンシェル科学である。ではそれを超えるためにはどうすればよいのか？

そのカギと思われるのが、空間概念自体の変革である。具体的にいうと、空間を「(構造の定められた) 点集合」と考えるのではなく、「圏」と呼ばれるシステムとして考えなおすということである。圏とは何か、そしてなぜそれが空間概念にふさわしいのか、そして従来の考えと何が違うのかを簡単に説明してみよう。

自分では覚えていないのだが私にも赤ん坊だった時代がある。最初はあまり目も見えなかったはずだ。空間の捉え方が大人のそれと同じであったとは思えない。もちろん空間概念を獲得する土台は生得的なものが大きいであろうが、そこに様々な経験が獲得されることで成熟していくのであろう。では赤ん坊がどのように空間概念を獲得していくのかをちょっと想像してみよう。その赤ん坊は成長の過程で、いろいろと身体を動かしながら、可能な動きの間に「秩序」があることを体得していくだろう。

まず、動きのあいだにはある種の「同じさ」を考えることができる、ということが重要である。もちろん「完全に同じ」動きというものは厳密にいえばないが、常識的な意味で「同じ動き」というものを同一視してやることができるから、それを「動きの間の等しさ」とここでは考えよう。たとえば「手をたたく」といっても本当は毎回違う動きになってはいるはずだが、まあ「同じ」と思うことは可能である。すると、一つの動きにはその「はじまり」と「おわり」があり、ある動きの「おわり」とある動きの「はじまり」が一致するときには、それらをつないだ動きもまた「一連の動き」となっているといったことが理解されうる。動きは「合成」できるというわけである。

ここで「合成」というのは、「○○て (で)、 ○○」というときの「て」にあたる構造だ。重要なのは、「むすんで、ひらいて、てをうって」というのはできるが、「むすんで」からただちに (なにもせずに)「てをうって」ということはできない。「むすんで」の「おわり」は「てをうって」の「はじまり」と同じでないからだ。

実は圏というのは、ここで述べたような「動き」の秩序を一般的に定式化したものであるといえる。この「動き」に対応するものは (それが何であれ上に述べたような秩序に従うなら) 射と呼ばれる。例えば熱力学における「○○過程」といったようなものも、それら全体のなす秩序 (圏) の射と考えることができる (ちなみにこの観点は、熱力学の取り扱いにおいてきわめて重要なはずであり、この観点から熱力学を捉えなおす作業にも取り組んでいるところである)。

ところでその「はじまり」とか「おわり」とかというのは、動きと動きを媒介する、「何もしない」動きのようなものだ。一般に、このような「何もしない」射 (一つとは限らず、たくさんあってもよい) を恒等射とよぶ。この恒等射に対応するのが「対象」と呼ばれるもので、働きとしてとらえなおされた「もの」にあたる。注目すべきは、この恒等射 (対象) こそが、通常でいう「点」のほうに対応しているということである。いいかえると、空間を点の集まりとして見るというのは、この「特殊な射」だけから空間を構築していこうとすることにあたる。それに対し、「空間を圏として見る」というのは、むしろ空間はたくさんの「それ以外の多様な射」をたっぷり含んでいると見ることにほかならない。

構造が与えられた点集合 (位相空間、多様体…) を前提とすれば、そこでの「経路」を射とする圏 (ムーア経路圏) というものを作ることからもわかるが、旧い観点の中にも新しい観点への「芽」は潜んでいる。しかし新しい観点は、これまでに空間として考えられなかったような多様な

例を与えてくれるし、何よりも「空間の性質」を対応する圏の性質として特徴づけるという新しい考えを導く。

面白いのは、「点集合」＝「恒等射のみからなる圏」（離散圏）から一般の圏に移行して考えると、「場の量」たちのなす代数が自然と非可換になることである。係数が複素数のように「可換」な数を考えてさえである。具体的にいうと、各射に量を対応させるある種の関数たちの間に（射の合成の構造を保つ形で）自然な積を入れようとすると、「畳み込み」の概念に至る。この畳み込みの代数を「圏代数」と呼ぶのだが、これは（二つの異なる対象のあいだに射が一本でもあれば）必ず非可換になる [1]。

このような「圏代数」こそが「量子場」の正体ではないか？と私は考えている [2]。このように量子場を捉えたならば、「オフシェル」構造の本質が非常に明快に見えてくるのである。恒等射以外の射０という値が付与されたものだけを考えるのがオンシェル、そうでないものがオフシェル。これは、点ではなくその間の矢印にこそ「なんらかの量」が分布しているという、ドレスト光子についての直観的描像や、それに基づく数理モデルの知見と整合している。そして、なぜオンシェル側の発想にとらわれると「ドレスト光子」を全く理解することができないかも説明する。そして、この方向性で「相互作用する量子場」の厳密な数理モデルを作ることが私の（あまりにも遠大な）夢なのである。

ところで、このような場の理解は、どこかファラデーの「力線」を思わせる。ファラデーにとって場は、おそらく「点集合の上の関数」のような概念によって理解されるべきものではなかった。むしろそれは、点から点へとつながる力動的で多様で自律的な関係性＝「射」に他ならなかったのではないか。そう思うと、「圏としての時空」という考えは、ファラデーの思想を量子場の文脈で再構成することにつながるのではないかという気もする。

世知辛い人は、そんな夢のようなことを考えて一体何の役に立つのかと問うかも知れない。もし今そのように問われたら、ファラデーがかつて返したという答えを借りるしかあるまい。

赤ん坊が何の役に立ちますか？

参考文献

[1] Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, *13* 7, 1172. https://doi.org/10.3390/sym13071172

[2] Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, *13* 9, 1727. https://doi.org/10.3390/sym13091727