ドレスト光子の量子ウォークシミュレーションの簡約化について

瀬川悦生
(横浜国立大学)

ドレスト光子のエネルギー遷移問題を, 量子ウォークの流出入が伴うモデルに置き換え, 様々な興味深い実験結果との整合性について論じられている [1]. その際に, フォノンとドレスト光子の相互作用を表現するために, 各グラフ上の頂点に従来の量子ウォークモデルでは 2 次元であるのに対して, 3 次元の状態ベクトルが付随されている. 最初の 2 つの状態はドレスト光子の移動 (“グラフの座標”1, 2 方向) に関するものに加えて, 新たにフォノンによる相互作用も取り入れたものが残りの 1 つに相当する. 今回は同じ結果を与えつつも, 計算量的に簡約できる方法を報告する.

ドレスト光子の量子ウォークシミュレーションモデルにおいては, 与えられたグラフの各頂点に対して, 次のことが必ず成立している. 入ってくる有向辺が 2 本 (それを e_{in}^1, e_{in}^2 とおく) と, 出ていく有向辺 (それを e_{out}^1, e_{out}^2 とおく) が存在し, それに加えて, フォノンの影響を表す自己ループ (それを e_p とおく) がある. 時刻 t における有向辺上の関数 ψ_t によって, その状態が表され, 各時刻で, 外部からの入力を表す ρ と振動を表す絶対値の 1 の複素数 λ, そして 3 次元のユニタリ行列 $H = (h_{i,j})_{i,j\in\{1,p,2\}}$ を用いて,

$$\begin{bmatrix}\psi_{t+1}(e_{out}^1)\\ \psi_{t+1}(e_p)\\ \psi_{t+1}(e_{out}^2)\end{bmatrix} = H\begin{bmatrix}\psi_t(e_{in}^1)\\ \psi_t(e_p)\\ \psi_t(e_{in}^2)\end{bmatrix} + \lambda^t\begin{bmatrix}\rho(e_{out}^1)\\ \rho(e_p)\\ \rho(e_{out}^2)\end{bmatrix} \tag{0.1}$$

のように表される. ここで $0 < |h_{i,j}| < 1$ を仮定しておく. そこで, $\phi_t := \lambda^{-t}\psi_t$ とおくと, 適切な外部からの入力 ρ によって $\lim_{t\to\infty}\phi_t := \phi_\infty$ と収束する. これを定常状態と呼ぶ. すると, (0.1) を注意深く眺めると, 3 次元ベクトルで表現された量子ウォークのドレスト光子シミュレーションモデル (0.1) の $t\to\infty$ における定常状態は, 2 次元のベクトルを用いて, 次のように表される.

Proposition 1. グラフ $G = (V, A)$ 上のドレスト光子の量子ウォークシミュレーションモデルが外部から流入量 $\rho \in \mathbb{C}^A$ によって定常状態 $\phi_\infty \in \mathbb{C}^A$ に収束すると仮定する. 任意の頂点 $u \in V$ をもってきて, 入ってくる有向辺を e_{in}^1, e_{in}^2, 自己ループを e_p, そして出ていく頂点を e_{out}^1, e_{out}^2 とおく. このとき, 次が成立する.

$$\begin{bmatrix}\phi_\infty(e_{out}^1)\\ \phi_\infty(e_{out}^2)\end{bmatrix} = \tilde{H}\begin{bmatrix}\phi_\infty(e_{in}^1)\\ \phi_\infty(e_{in}^2)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\nu_\lambda(e_{out}^1)\\ \nu_\lambda(e_{out}^2)\end{bmatrix}, \tag{0.2}$$

$$\phi_\infty(e_p) = \frac{\tilde{h}_{p,1}\phi_\infty(e_{in}^1) + \tilde{h}_{p,2}\phi_\infty(e_{in}^2) + \tilde{\rho}(e_p)}{1 - \tilde{h}_{p,p}}. \tag{0.3}$$

ここで $\tilde{H}$ は 2 次元のユニタリ行列で,

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{1,1} + \frac{\tilde{h}_{1,p}\tilde{h}_{p,1}}{1-\tilde{h}_{p,p}} & \tilde{h}_{1,2} + \frac{\tilde{h}_{1,p}\tilde{h}_{p,2}}{1-\tilde{h}_{p,p}} \\ \tilde{h}_{2,1} + \frac{\tilde{h}_{2,p}\tilde{h}_{p,1}}{1-\tilde{h}_{p,p}} & \tilde{h}_{2,2} + \frac{\tilde{h}_{2,p}\tilde{h}_{p,2}}{1-\tilde{h}_{p,p}} \end{bmatrix}, \tag{0.4}$$

ν は補正された出力で,

$$\nu(e^j_{out}) = \frac{\tilde{h}_{j,p}}{1-\tilde{h}_{p,p}}\tilde{\rho}(e_p) + \tilde{\rho}(e^j_{out}) \ \ (j = 1, 2)$$

となる. 但し, $\tilde{h}_{i,j} = \lambda h_{i,j}$, $\tilde{\rho} = \lambda\rho$.

この命題のメッセージは, 各頂点 3 次元のベクトルが付随する空間上の, 3 次元ユニタリ行列 H で記述される時間発展が, 時刻無限大において, それよりも小さい各頂点 2 次元のベクトルが付随する空間上における 2 次元ユニタリ行列 $\tilde{H}$, (0.4) で記述される時間発展によって, 与えられる. そして, (0.3) により, オリジナルの量子ウォークの定常状態が完全に復元される.

この結果はコロンブスの卵的なごく単純な代数的計算を幾つも行うことで得られたが, その解釈も次のように与えられる. 単純のため, $\lambda = 1$ として, 例えば, $(\tilde{H})_{1,1}$ について, $|h_{p,p}| < 1$ であるから,

$$h_{1,1} + \frac{h_{1,p}h_{p,1}}{1-h_{p,p}} = h_{1,1} + h_{1,p}h_{p,1} + h_{1,p}h_{p,p}h_{p,1} + h_{1,p}h^2_{p,p}h_{p,1} + h_{1,p}h^3_{p,p}h_{p,1}\cdots$$

と読み直すことで, パスの数え上げで解釈できる. 第 1 項目は状態 "1" から, "1" にまた遷移する重み, つまり 1 ステップで "1" から "1" に初めて戻ってくる重み; 第 2 項目は状態 "1" から, 状態 "p" に 1 ステップ寄り道して "1" にまた遷移する重み, つまり 2 ステップで "1" から "1" に初めて戻ってくる重み; 第 2 項目は状態 "1" から, 状態 "p" に 2 ステップ寄り道して "1" にまた遷移する重み, つまり 3 ステップで "1" から "1" に初めて戻ってくる重み;... と展開できる. 要するに, $(\tilde{H}_{1,1})$ は状態 1 から出発して, 状態 2 にはヒットするとなく 1 に再び戻ってくる重みである. 状態 "1" から状態 "p" へ流入してきたときの, 状態 "1" へ流出させる状態 "p" の応答とも解釈できる. 他の成分や, 補正された出力 ν についても同様な解釈を与えられ, その正当性を確認できる.

今のところこの最も有用な応用としては, グラフ G として, オリジナルのローテーション付きグラフ (G_o, ρ) のブローアップグラフをとってきたドレスト光子量子ウォークシミュレーションモデルが, [2] で扱っているモデルとして捉えることができ, その定常状態が背後にあるローテーション ρ に付随する閉曲面上の埋め込み方法で, 記述できることになることで, 今後の発展の期待が持てる.

References

[1] M. Ohtsu, Off -shell archive: Motoichi Ohtsu "Numerical calculation of a dressed photon energy transfer based on a quantum walk model" Off-shell arXiv: 2206O.001.v1 (2013).

[2] Yu. Higuchi, E. Segawa, "Quantum walks on graphs embedded in orientable surfaces", arXiv:2402.00360.