

Weyl テンソルについて

佐久間弘文

寄稿文は、今回で 2 回目となる。前回は、私が興味を持っていた渦力学の知見が如何にして現在のドレスト光子 (DP) 研究に繋がったかについて簡単にお話しした。その際に、テンソル解析を勉強した延長として、一般相対性理論の基本的輪郭も独学で勉強し、Riemann の曲率テンソルが渦度の様な交代テンソルの二次式に非常によく似た性質を持っている事に興味を覚えたという事についても触れた。今回は、その続きとして、昨年から加速しつつ現在行っているドレスト光子研究と宇宙論とを繋ぐ試みにおいて Weyl テンソルも興味深い形で関わって来たので、今回はその事について触れる。(この件に関して、具体的な計算の主要部については、Off-shell archive に Sakuma & Ochiai で掲載されている)

一般相対論の物理的定式化の一部において、Einstein が電磁場に関する Maxwell 方程式を参照した事は、色々な本に書いてある事だが、エネルギーと運動量という視点で、Maxwell 理論と一般相対論とを比べてみると、そこには大きな違いがある事に気付く。前者においては、場の構成要素として、物質的性質を持つ 4 元電流と、それを「源」としてその周りの空間に広がる非物質的な電磁場という 2 種類のもが存在するが、どちらのものにもエネルギーと運動量は付随している。しかし、後者の場合、重力場以外の物理量が有するエネルギー・運動量テンソル密度を曲率テンソルの一種としての Ricci テンソル密度と同定しているが、純粋な重力場の局所的なエネルギー・運動量テンソル密度に対しては何も言っていないし、普通に読めばそういうものは定義できないと読めるので(擬テンソルとして局所的なものを定義しようという試みは色々あるらしい)、その事は、古典論としては特異な理論であると言える。最近、重力波の検出実験について色々と注目されているようであるが、専門家ではない私はその詳細についての知見はもちろんない。しかし、Einstein 理論を受け入れる限り、上で述べた様に、重力波は電磁波の様な局所的に定義できるエネルギー・運動量を持たない奇妙な波という事になる。

一般相対論において、重力場の「源」が存在しない領域は、Einstein 空間と呼ばれ、それは Ricci がゼロとなる空間として記述される。Ricci がゼロの場合でも、時空の曲率は一般にはゼロにならず、それは Weyl テンソルと呼ばれる特殊な Riemann 曲率テンソルで記述される。Weyl テンソルの様々な共変、反変成分

のうち、特に $W_{[abc]}^{\hat{d}}$ は共形変換に対して不変となる為に、Weyl テンソル
はしばしば Conformal tensor と呼ばれている。因みに、4元電流が存在しない
Maxwell 理論は、(4次元時空において) 共形不変である。従って電磁場と重
力場とを比較した場合、電磁場において、4元電流という場の「源」が存在し
ない領域での電磁場 $F_{[ab]}$ に対応するものは、重力場では Weyl テンソルとい
う事になる。

今から十数年位前に、私は、電磁場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\hat{ab}}$ が
 $T^{\hat{ab}} = -F^{\hat{ac}}F^{\hat{b}}_{\hat{c}} + F^{\hat{cd}}F_{\hat{cd}}g^{\hat{ab}}/4$ で与えられる事を参考にして、
もし、 $S^{\hat{ab}} = -W^{\hat{acde}}W^{\hat{b}}_{\hat{cde}} + W^{\hat{ijkl}}W_{\hat{ijkl}}g^{\hat{ab}}/4$ という量を考
えたら、それは $T^{\hat{ab}}$ の様な保存量 (テンソル発散がゼロという意味の) にな
るだろうか興味を持ち少し計算した事があった。計算してみると、実際にその
テンソル発散はゼロになった。しかし、こんな綺麗な結果はきっと既に知られ
ていると思ってそのままにしていた。(実際後で、この結果は既に知られている
事を知った) その後、何年も経ってから、再び何かの折に、電磁場と重力場と
の類似が気になる事があって色々と空想を広げていたら、上の $S^{\hat{ab}}$ の事が思
い出され、これに適当な物理定数を掛ければ、それは重力場の局所的なエネ
ルギー・運動量テンソル密度の様なものになるので、更に詳しくその性質を調べ
てみた。すると、どうも $S^{\hat{ab}}$ は恒等的にゼロになるようなのでがっかりして、
この事は忘れてしまった。

つい最近になって、Majorana 場を通してドレスト光子と dark energy との関
係性を調べている時に、宇宙論において顔を出す宇宙項 $\Lambda g_{[ab]}$ の意味も同時
に理解できるのでは? と感じた時があった。以下に、その事を少し説明する。
現在の宇宙論では、宇宙膨張の原因を dark energy か、あるいは、正の宇宙定
数 Λ を持つ宇宙項で説明する。私の Majorana 仮説では、電磁場の空間的運動
量場を担う Majorana 場の“基底”状態が dark energy として機能するので、宇
宙項は必要ない。それでは、全く必要ないのかと言えば、そうではなく、これ
まで宇宙項 $\Lambda g_{[ab]}$ との関連が顧みられる事がなかった dark matter の解釈に
宇宙項が使える可能性があるのではと気付いたという事である。上で説明した
 $S^{\hat{ab}}$ が本当にゼロであったなら (私の知る限り、 $S^{\hat{ab}}=0$ はどこにも書いて
ない様に思える)、その式は $W^{\hat{2}} := W^{\hat{ijkl}}W_{\hat{ijkl}}$ がゼロとなる特異点を除
くと、計量テンソル $g_{[ab]}$ が Weyl テンソルの2次式を $W^{\hat{2}}$ で割ったもので表
現できるという事を示している。これは未だに謎とされている宇宙項の物理的
意味を与えるものではないかと思われ、その意味で非常に重要なので、 $S^{\hat{ab}}$
 $= 0$ らしいという私の計算を落合先生に検証して頂いた。(冒頭で触れた
Off-shell archive の報告) 少々気になるのが、 $W^{\hat{2}}=0$ となる時空点の存在だ
が、例えば球対称の星の周りの時空を例にとると、 $W^{\hat{2}}$ は確か動径座標 r の

4乗か（6乗かのどちらか）に反比例して減少する様な量なので、星や銀河の分布を連続体の様に近似してあつかう宇宙論におけるざっくりとした描像では $W^{\{2\}}=0$ はとりあえず無視してもよいのではと思える。また宇宙論においては、宇宙は第一次近似的には等方的な Friedmann-Robertson-Walker 計量で記述され、その様な宇宙では Weyl テンソルはゼロ (conformally flat) となる事が知られている。宇宙論における dark matter の最大の役割は、物質としての銀河が誕生する為の重力的な“種”として機能するという事であるので、等方宇宙からの偏差として存在する Weyl 場が dark matter としても何ら矛盾は無いように思える。その場合、重力場は万有引力の場である事から、宇宙定数は負となりその大きさは、ドレスト光子モデルから見積もる事ができる。

私の Clebsch dual モデルの意義付けは、小嶋先生から教えて頂いた量子場の相互作用においては、その運動量ベクトル p は、 $p^{\{2\}}>0$, $p^{\{2\}}=0$, $p^{\{2\}}<0$ のすべてのものが関与する事が必要であるという事であった。上で述べた dark matter の新モデルとしての宇宙項を、重力場の相互作用を担う Weyl テンソルのエネルギー・運動量場と見做せば、それは $g_{\{ab\}}$ として時間的、光的、空間的な領域をカバーするという意味で量子場の相互作用に似ている様に思え興味深い。

Dark matter の分布を仮想的に連続変化させ、一様宇宙に近づけると (Weyl 場を重力場と見做せば、これは重力場を漸近的にゼロに近づける事に対応)、その極限は負の宇宙定数を持つ反ドジッター宇宙になる。その様な宇宙には、超ひも理論家が CFT/ADS 対応 (Conformal Field Theory/Anti-de Sitter Space) と呼ぶある対応 (重力場の無い共形不変な量子場 “もどき” が弱い5次元重力と同形になるという対応らしい) が存在して、その対応を使うと非線形性が強い量子場の計算を非線形性が (非常に) 弱い重力場の計算に翻訳できるメリットがあるので注目されているとの事。現実の宇宙では、もちろん共形不変性は破れている。その破れに伴って現れるスケール因子が宇宙定数に絡んでいると考えるのは自然である。電磁場の場合、共形不変性が破れるのは電荷を持つような素粒子が生まれ、電磁相互作用が発生する時である。電磁相互作用に対応する Clebsch dual (CD) 場は、波数の次元を持つドレスト光子定数 κ により Majorana 場として量子化される。そして、CD 場の中核的な式となる空間的 Klein-Gordon 方程式が数学的には Snyder relativity と呼ばれる 宇宙定数を持つ等方的時空としての de Sitter 空間の時空構造と同形になるので、その事を通して、電磁場の共形不変の破れに伴うスケール因子 $\kappa^{\{2\}}$ が宇宙定数にも結び付くというシナリオが可能となり、この事をまとめた論文を作成し、現在投稿中である。