RODreP叢書

オフシェル科学ぶらりあるき

第2巻

オフシェル科学フォーラム寄稿集

（令和元年12月～令和3年2月）

（一社）ドレスト光子研究起点
オフシェル科学フォーラム企画委員会　編

HP上での掲載のURL:　http://jpn.rodrep.or.jp/?cat=12

登録番号　RSBN 2021-02

（一社）ドレスト光子研究起点
〒221-0022 神奈川県横浜市神奈川区守屋町3-13-19

URL:　http://jpn.rodrep.org/

まえがき

(一般社団法人)ドレスト光子研究起点 (Research Origin for Dressed Photon：RODreP) ではドレスト光子をはじめとするオフシェル科学の基礎研究を推進しておりますが、おかげさまで気鋭の研究者の皆様がご趣旨に賛同下さり、共同研究が順調に進展しております。

また、当法人ではオフシェル科学研究の啓蒙普及にも努めております。その一環として、「オフシェル科学研究フォーラム」を運営しております。これは上記の研究者の皆様が中心となり、関連研究の情報交換を行う場です。本冊子「オフシェル科学ぶらりあるき」はこのフォーラムが企画してまとめられたもので、上記の研究者の皆様方からこれまでご寄稿いただいた記事を掲載し、RODreP が実施している最近のオフシェル科学研究の状況などを紹介するものです。研究成果のみでなく、研究に対する考え方、意見などを広い視野からご執筆いただき、肩のこらない読み物としてまとめました。なお、この記事は当法人のHP(http://jpn.rodrep.or.jp/?cat=12)にも掲載、順次更新しておりますので、そちらも閲覧いただければ幸いです。これらをつうじ、皆様にオフシェル科学のご理解を賜りますよう、ここにお願い申し上げます。

令和３年３月

大津元一
「オフシェル科学研究フォーラム」企画委員会　委員長
(一般社団法人)ドレスト光子研究起点　代表理事

目次

化学反応とドレスト光子

〜 フリッツ ロンドンの先見とオフシェル電磁場の量子化 〜

坂野　斎

山梨大学工学部 *

(Dated: December 24, 2019)

超伝導理論の黎明期，1935 年にロンドン兄弟は超伝導電流が反磁性電流であることを見抜き，磁場（本質的にベクトルポテンシャル）を原因，反磁性電流密度を結果とする因果関係をロンドン構成方程式として表しました [1, 2]．それは，1957 年に BCS 理論 [3, 4] が提案される 10 年以上前のことでした．

兄のフリッツ ロンドンは量子論を化学へ適用した先駆者の一人でもあり，水素分子の共有結合形成をハイトラーとともに量子論から初めて説明したこと（ハイトラー - ロンドンの理論）は有名です．彼の 1950 年の著書 ”Superfuids I ” [1, 2] の序章の最後に，ベンゼンなどの芳香族分子の反磁性電流を引き合いに，次のような考えを述べています : 低温の無機物質で実現するマクロな量子効果である超伝導の実験的・理論的研究は，生体内の高分子が複雑な構造にも拘わらず，全体としてひとつの量子効果を発現する仕組みの解明に役立つだろう．

ロンドンの考えを超伝導の特徴から次の 2 つの論点に分けてみます :

1．ベクトルポテンシャルを原因とし，ロンドン構成方程式により導かれる反磁性電流．

2．格子振動に媒介される大域性．

ここでは，第 1 の論点について考えます[1]．

微視的な観点からは，ロンドン構成方程式は，エネルギー非共鳴条件下の電磁応答に相当し [3, 5]，反磁性電流は原子から高分子・固体に至るまで，物質の電磁応答に遍く存在します．反磁性電流と化学反応の関わりを「ヘム」を例に考えてみましょう．

私たちの身体では，ヘモグロビンやミオグロビンといったヘムタンパク質の巨大分子の一部となっているヘムが酸素分子を吸着して運搬・貯蔵しています．ヘムは大きな π 電子共役系を構成するポルフィリンが鉄イオンに配位したもので，酸素分子はこの鉄イオンと化学結合し，必要なときに鉄イオンから解離します．

ここで鉄イオンが高スピン状態になったとしましょう．高スピン状態とは，内殻の 3d 電

*Electronic address: banno@yamanashi.ac.jp

[1] 第 2 の論点については，間接遷移型半導体から強強度の発光を実現したフォトンブリーディングデバイスを題材に将来の機会に述べたいと思います．

子のスピンをできるだけ揃えた状態で，フントのルールに従うので，鉄イオンが孤立して存在しているのに近い状態です.（つまり，鉄イオン-π電子共役系の結合が弱くなった状態ですが，その実現には第2の論点の格子振動が関係していると考えられます.）高スピン状態の鉄イオンは局所磁場＝オフシェルのベクトルポテンシャルを作り，それを浴びるπ電子共役系には応答としてロンドン構成方程式に従う反磁性電流が流れるはずです．π電子系の運動エネルギーが大きくなることを犠牲にして，鉄イオンの高スピン由来の磁化電流密度とπ電子共役系の反磁性電流密度の電流密度-電流密度相互作用エネルギーによってヘム全体でエネルギー的に得をする仕組みと考えられます．この高スピンの鉄イオンが生むベクトルポテンシャルは反磁性電流による遮蔽によって，ヘムの外側からは見えなく，逆に，鉄イオン近傍では局所的に強い振幅と急峻な空間変化（強い磁場）を与えます．鉄イオン-酸素分子間の化学結合があるなら解離の中間体であるラジカルが安定化され，化学平衡が解離の方向に傾くと考えられます．実際，局所スピン近傍のベクトルポテンシャルや磁場を計算してみると有意な影響を与える大きさです．高スピン状態をとれる遷移金属を中心にπ電子共役系が取り巻くヘムを含むものは，ヘモグロビン，ミオグロビン，シトクローム P450 をはじめ多数あり，それらが生体内で化学反応を制御して活躍することには共通の理由があるのだと思います.

ヘムに関する，いわば，電流密度-電流密度相互作用による化学反応駆動のシナリオは，局所スピン（磁化電流密度）とその周辺のキャリア電子・正孔の反磁性電流密度を対応付けできれば近接場光化学反応 [6–8] やさらに，直接伝搬光と関わらないナノ構造近傍の触媒反応にも適用できるでしょう.

上で述べてきた局在化･潜在化したベクトルポテンシャルは，別の見方では，電流密度-電流密度相互作用を担う場；ドレスト光子です．しかし，このオフシェルベクトルポテンシャルは，非相対論的量子電磁力学において物質を拠り所に内在するという意味で同じ境遇にあるスカラーポテンシャルと同じようには扱われていません.

スカラーポテンシャルは，ポアッソン方程式を解いて電荷密度演算子という量子場で表し，作用積分から消去され，電荷密度-電荷密度間の2体相互作用に転化されます．このことを辿るなら，オフシェルベクトルポテンシャルは，2体の電流密度-電流密度相互作用に転化されるのが，ドレスト光子の名称に相応しい扱い方だと思います.

ロンドンの先見的な考えは，オフシェル電磁場の量子化という根本的な問題と関係しています.

[1] F. London. *Superfluids vol.1, Macroscopic Theory of Superconductivity.* Dover Publications, Inc., New York, 1950.

[2] F. ロンドン and 井口家成（訳）. **超伝導のマクロ理論**. 講談社, 東京, 1974.

[3] J. R. Schrieffer. *Theory of Superconductivity.* CRC Press, Boca Raton, 1999.

[4] シュリーファー and 樺沢宇紀（訳). **超伝導の理論**. 丸善プラネット株式会社, 東京, 2010.

[5] I. Banno. Theory of single susceptibility for near-field optics equally associated with scalar and vector potentials, 2018. https://arxiv.org/abs/1807.10992v3, (also in Off-shell archive, http://offshell.rodrep.org, DOI: 10.14939/1809O.002.v1).

[6] T. Yatsui, K. Hirata, W. Nomura, Y. Tabata, and M. Ohtsu. Realization of an ultra-flat silica surface with angstrom-scale average rough- ness using nonadiabatic optical near-field etching. *Appl. Phys. B*, 93:55–57, 2008.

[7] N. Tanjeem, T. Kawazoe, and T. Yatsui. CO_2 phonon mode renormalization using phonon-assisted energy up-conversion. *Scientific Reports*, 3:3341, 2013.

[8] T. Yatsui, T. Tsuboi, M. Yamaguchi, K. Nobusada, S. Tojo, F. Stehlin, O. Soppera, and D. Bloch. Optically controlled magnetic-field etching on the nano-scale. *Light: Science and Applications*, 5:e16054, 2016.

Weyl テンソルについて

佐久間弘文

寄稿文は、今回で 2 回目となる。前回は、私が興味を持っていた渦力学の知見が如何にして現在のドレスト光子（DP）研究に繋がったかについて簡単にお話しした。その際に、テンソル解析を勉強した延長として、一般相対性理論の基本的輪郭も独学で勉強し、Riemann の曲率テンソルが渦度の様な交代テンソルの二次式に非常によく似た性質を持っている事に興味を覚えたという事についても触れた。今回は、その続きとして、昨年から加速しつつ現在行っているドレスト光子研究と宇宙論とを繋ぐ試みにおいて Weyl テンソルも興味深い形で関わって来たので、今回はその事について触れる。（この件に関して、具体的な計算の主要部については、Off-shell archive に Sakuma & Ochiai で掲載されている）

一般相対論の物理的定式化の一部において、Einstein が電磁場に関する Maxwell 方程式を参照した事は、色々な本に書いてある事だが、エネルギーと運動量という視点で、Maxwell 理論と一般相対論とを比べてみると、そこには大きな違いがある事に気付く。前者においては、場の構成要素として、物質的性質を持つ４元電流と、それを「源」としてその周りの空間に広がる非物質的な電磁場という２種類のものが存在するが、どちらのものにもエネルギーと運動量は付随している。しかし、後者の場合、重力場以外の物理量が有するエネルギー・運動量テンソル密度を曲率テンソルの一種としての Ricci テンソル密度と同定しているが、純粋な重力場の局所的なエネルギー・運動量テンソル密度に対しては何も言っていないし、普通に読めばそういうものは定義できないと読めるので（擬テンソルとして局所的なものを定義しようという試みは色々あるらしい）、その事は、古典論としては特異な理論であると言える。最近、重力波の検出実験について色々と注目されているようであるが、専門家ではない私はその詳細についての知見はもちろんない。しかし、Einstein 理論を受け入れる限り、上で述べた様に、重力波は電磁波の様な局所的に定義できるエネルギー・運動量を持たない奇妙な波という事になる。

一般相対論において、重力場の「源」が存在しない領域は、Einstein 空間と呼ばれ、それは Ricci がゼロとなる空間として記述される。Ricci がゼロの場合でも、時空の曲率は一般にはゼロにならず、それは Weyl テンソルと呼ばれる特殊な Riemann 曲率テンソルで記述される。Weyl テンソルの様々な共変、反変成分

のうち、特に $W_{abc}{}^{d}$ は共形変換に対して不変となる為に、Weyl テンソルはしばしば Conformal tensor とも呼ばれている。因みに、４元電流が存在しない Maxwell 理論は、(4 次元時空において）共形不変である。従って電磁場と重力場とを比較した場合、電磁場において、４元電流という場の「源」が存在しない領域での電磁場 F_{ab} に対応するものは、重力場では Weyl テンソルという事になる。
今から十数年位前に、私は、電磁場のエネルギー・運動量テンソル T^{ab} が $T^{ab}=-F^{ac}F^{b}{}_{c}+F^{cd}F_{cd}g^{ab}/4$ で与えられる事を参考にして、もし、$S^{ab}=-W^{acde}W^{b}{}_{cde}+W^{ijkl}W_{ijkl}g^{ab}/4$ という量を考えたら、それは T^{ab} の様な保存量（テンソル発散がゼロという意味の）になるだろうか興味を持ち少し計算した事があった。計算してみると、実際にそのテンソル発散はゼロになった。しかし、こんな綺麗な結果はきっと既に知られていると思ってそのままにしていた。(実際後で、この結果は既に知られている事を知った）その後、何年も経ってから、再び何かの折に、電磁場と重力場との類似が気になる事があって色々と空想を広げていたら、上の S^{ab} の事が思い出され、これに適当な物理定数を掛ければ、それは重力場の局所的なエネルギー・運動量テンソル密度の様なものになるので、更に詳しくその性質を調べてみた。すると、どうも S^{ab} は恒等的にゼロになるようなのでがっかりして、この事は忘れてしまった。
つい最近になって、Majorana 場を通してドレスト光子と dark energy との関係性を調べている時に、宇宙論において顔を出す宇宙項 Λg_{ab} の意味も同時に理解できるのでは？と感じた時があった。以下に、その事を少し説明する。
現在の宇宙論では、宇宙膨張の原因を dark energy か、あるいは、正の宇宙定数Λを持つ宇宙項で説明する。私の Majorana 仮説では、電磁場の空間的運動量場を担う Majorana 場の“基底”状態が dark energy として機能するので、宇宙項は必要ない。それでは、全く必要ないのかと言えば、そうではなく、これまで宇宙項 Λg_{ab} との関連が顧みられる事がなかった dark matter の解釈に宇宙項が使える可能性があるのではと気付いたという事である。上で説明した S^{ab} が本当にゼロであったなら（私の知る限り、$S^{ab}=0$ はどこにも書いてない様に思える)、その式は $W^{2}:=W^{ijkl}W_{ijkl}$ がゼロとなる特異点を除くと、計量テンソル g_{ab} が Weyl テンソルの 2 次式を W^{2} で割ったもので表現できるという事を示している。これは<u>未だに謎とされている宇宙項の物理的意味</u>を与えるものではないかと思われ、その意味で非常に重要なので、S^{ab} ＝０らしいという私の計算を落合先生に検証して頂いた。（冒頭で触れた Off-shell archive の報告）少々気になるのが、$W^{2}=0$ となる時空点の存在だが、例えば球対称の星の周りの時空を例にとると、W^{2} は確か動径座標 r の

４乗か（６乗かのどちらか）に反比例して減少する様な量なので、星や銀河の分布を連続体の様に近似してあつかう宇宙論におけるざっくりとした描像では $W^{2}=0$ はとりあえず無視してもよいのではと思える。また宇宙論においては、宇宙は第一次近似的には等方的な Friedmann-Robertson-Walker 計量で記述され、その様な宇宙では Weyl テンソルはゼロ（conformally flat）となる事が知られている。宇宙論における dark matter の最大の役割は、物質としての銀河が誕生する為の重力的な“種”として機能するという事であるので、等方宇宙からの偏差として存在する Weyl 場が dark matter としても何ら矛盾は無いように思える。その場合、重力場は万有引力の場である事から、宇宙定数は負となりその大きさは、ドレスト光子モデルから見積もる事ができる。
私の Clebsch dual モデルの意義付けは、小嶋先生から教えて頂いた量子場の相互作用においては、その運動量ベクトル p は、$p^{2}>0$，$p^{2}=0$，$p^{2}<0$ のすべてのものが関与する事が必要であるという事であった。上で述べた dark matter の新モデルとしての宇宙項を、重力場の相互作用を担う Weyl テンソルのエネルギー・運動量場と見做せば、それは g_{ab} として時間的、光的、空間的な領域をカバーするという意味で量子場の相互作用に似ている様に思え興味深い。
Dark matter の分布を仮想的に連続変化させ、一様宇宙に近づけると（Weyl 場を重力場と見做せば、これは重力場を漸近的にゼロに近づける事に対応）、その極限は負の宇宙定数を持つ反ドジッター宇宙になる。その様な宇宙には、超ひも理論家が CFT/ADS 対応(Conformal Field Theory/Anti-de Sitter Space)と呼ぶある対応（重力場の無い共形不変な量子場“もどき”が弱い５次元重力と同形になるという対応らしい）が存在して、その対応を使うと非線形性が強い量子場の計算を非線形性が（非常に）弱い重力場の計算に翻訳できるメリットがあるので注目されているとの事。現実の宇宙では、もちろん共形不変性は破れている。その破れに伴って現れるスケール因子が宇宙定数に絡んでいると考えるのは自然である。電磁場の場合、共形不変性が破れるのは電荷を持つような素粒子が生まれ、電磁相互作用が発生する時である。電磁相互作用に対応する Clebsch dual(CD)場は、波数の次元を持つドレスト光子定数 κ により Majorana 場として量子化される。そして、CD 場の中核的な式となる空間的 Klein-Gordon 方程式が数学的には Snyder relativity と呼ばれる 宇宙定数を持つ等方的時空としての de Sitter 空間の時空構造と同形になるので、その事を通して、電磁場の共形不変の破れに伴うスケール因子 κ^{2} が宇宙定数にも結び付くというシナリオが可能となり、この事をまとめた論文を作成し、現在投稿中である。

量子ウォークの極限分布の舞台裏

瀬川悦生
(横浜国立大学)

一次元上の空間一様な量子ウォークの極限分布が今野分布 [1] として知られてから約 18 年も経過したようです．この分布について考えてみたいと思います．今回はその時間発展の表現方法を, いつもと比べて少し回りくどく見える方法で表現してみたいと思います．まず各時刻 n でのある 4 次元の複素ベクトルで与えれられる確率振幅 $\psi_n : \mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{C}^4)^{\mathbb{Z}}$ が, 次の漸化式で進行するものとします．

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(x,y) = (Q \otimes \bar{Q})\psi_n(x-1,y-1) + (P \otimes \bar{P})\psi_n(x+1,y+1) \\ + (P \otimes \bar{Q})\psi_n(x+1,y-1) + (Q \otimes \bar{P})\psi_n(x-1,y+1) \quad (1)\end{aligned}$$

ここで, $P, Q \in M_2(\mathbb{C})$ (2 次元の行列) は $P+Q$ がユニタリ行列で, $PP^* + QQ^* = I_2$(単位行列) などを満たします．一次元格子の量子ウォークを語るはずが何故か二次元格子の話を最初にお見せしてしまいましたが, 実はここから次のようにすると一次元量子ウォークの確率分布 $\mu_n(x)$ を与えることができます．$\tilde{\psi}_n(x,y)$ を 4 次元のベクトルから 2 次元の行列へのある適切な同型表現とすると,

$$\mu_n(x) = \mathrm{tr}[\tilde{\psi}_n(x,x)]$$

で表されます．つまり, 一次元の量子ウォーカーの "確率分布" は, ちょうど, トレースがあるのはちょっと目をつぶれば, 大体「斜め 45 度回転させた $\mathbb{Z}^2$ 格子上の量子ウォークの $x = y$ のところの "確率振幅" そのもの」とも言えるし, 「1 次元格子上の 2 体の独立な量子ウォーカーがちょうど衝突したときの "確率振幅" そのもの」とも解釈することができるのです．時刻 n で一次元上の量子ウォーカーが存在する場所は $-n$ から n にいるわけですが, $F_n(s)$ を量子ウォーカーが場所 $-n$ から ns の場所の間, つまり一番左端から見て大体全体の $10s$ 割のところに見つかる確率 (つまり $F_n(s) = \sum_{x \le ns} \mu_n(x)$) とすると, 例のあの極限定理 [1] は, 適切な初期状態を持ってくれば本質的には

$$\lim_{n\to\infty} F_n(s) = F_*(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-u^2)\sqrt{r^2-u^2}} \mathbf{1}_{[-r,r]}(u)du$$

であるということになります．ここで $0 < r < 1$ は P, Q で定まる定数です．このようにして一次元上の量子ウォークの極限分布は, 背後では 1 つ上の次元で蠢いているもの中から $x = y$ という全体から見て極めて特殊な場所の確率振幅そのものだけを摘まみだし下の次元に落とし込むことではじめて達成されているということが見てとれると思います．

その一方で開放系量子ウォークというものがあります [2]．ここで扱うモデルとして先ほどの P と Q を使って, 各時刻における密度行列 $\rho_n \in (M_2(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ が次のように時間発展します．

$$\rho_{n+1}(x) = Q\rho_n(x-1)Q^* + P\rho_n(x+1)P^* \quad (2)$$

$PP^* + QQ^* = I$ という性質から, トレースが各ステップで保存されるため, やはりこちらも各時刻で確率分布が与えられます. それでは先ほどの量子ウォークと比べてどのような極限分布を持つかというと, $G_n(s)$ を時刻 n において場所 $-n$ から, 今度は先ほどのスケーリングとは異なる $\sqrt{n}s$ の場所の間に見つかる確率とすると, 次のようになります [2].

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G_*(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{e^{-u^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du$$

ここで σ は P, Q で定まる定数です. スケーリングが拡散的で, 極限分布の形は正規分布になり, 実は一つ前の時刻での行先に依存して現在の行先の確率が決まるある相関付きランダムウォークいうものと同じになります. これと先ほどの量子ウォークとの対応を見るために, この時間発展を次のように書き直すことができます.

$$\phi_n(x) = (Q \otimes \bar{Q})\phi_n(x-1) + (P \otimes \bar{P})\phi_n(x+1) \tag{3}$$

つまり, 量子ウォーク系の時間発展 (1) と開放系量子ウォーク系の時間発展 (3) を比べることによって, ランダムウォークの分布が, (1) 式の量子ウォーク系の時間発展そのものを $x = y$ のみに制限することで, 得られることがわかります.

この全くことなる挙動を示す二者をどうにか連続化できないしょうか？最後に, この研究の進捗状況の一部を未だ途中段階で恐縮ですが, 報告したいと思います. 先ほどの考察から, ドメインを $D_M := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x - y| \leq M\}$ に制限したときの, 時間発展 (1) を考えてみます. すると, 簡単な考察から $M = 0$ のときの開放系量子ウォーク (≒ランダムウォーク≒背後の蠢きを最大限に削ったもの) から始まって, M を大きくしていくにしたがって, $M = \infty$ のときのオリジナルの一次元上の量子ウォーク (≒背後の蠢きが最大限に活かされたもの) の確率分布に近づくことが容易に想像できるかと思います. 実際, $M = 0$ のランダムウォークから一たびはみ出して, $M = 1$ になると拡散的に拡がる (時刻 n に対して $\sqrt{n}$ のオーダーで拡がる) ものが原点の周りに 1 つと, 線形的に拡がる (時刻 n に対して n のオーダーで拡がる) モードが両端に 2 つ早々に現れることがある程度数学的に証明できます. そして M が大きくなるにしたがって, この線形的に拡がるモードがいくつも増えていき, 最終的にこれらの結合で量子ウォークの分布を作り出していることを示唆する数値計算が得られています. また, $M \geq 3$ では現状, 解析は難しいのですが, これらの幾つかが今野分布の両端 $\pm r$ での無限大に跳ね上がりを与えるエアリー関数 [3] で書き表されると予想しています. そしてタイトルにある量子ウォークの極限分布の舞台裏をより詳細に考察することがオフシェル科学へ通じるのではないかと考えています. さらにはドレスト光子の構造の “何者かを拾い上げている” と考えられている量子ウォークとはやはり何者なのかという問題の答えの一つになることを期待しています.

References

[1] N. Konno, Quantum Inf. Process., **1** (2002) pp.345-354, J. Math. Soc. Japan **57** (2005) pp.1179-1195.

[2] S. Attal, F. Petruccione, C. Sabot, I. Sinayskiy, Journal of Statistical Physics **147** (2012) pp.832-852.

[3] T. Sunada, T. Tatsuya, Journal of Functional Analysis **262** (2012) pp.2608–2645.

数工連携の立場から見たドレスト光子とオフシェル科学

松岡 雷士（広島工業大学）

2019年の10月からドレスト光子の研究グループに本格参加し、短い期間ながらも多数の魅力的な研究者と研究テーマに巡り合うことが出来た。自分は同位体分離という工学の分野に量子ウォークの数理を活用する研究でオリジナリティを出してきた人間であり、今回も対象はドレスト光子に変わりつつも、基本的には量子ウォークの数理を現実の現象に当てはめていく立場をとるものと考えていた。しかしながら実際に研究を開始してみると、ドレスト光子という現象はその背後にある広大なオフシェル科学の覗き穴に過ぎず、また既存の量子ウォークの考え方は現象のモデル化の糸口ではあるものの、オフシェル科学を記述するには今一歩足りていないということもわかってきた。まさに数学から物理を貫いて工学に至る過程の全てがオフシェル科学の研究対象であり、どうやってこれだけの分野の研究者が一つの目標の下に集まることが出来たのか不思議にすら感じてしまう、それがオフシェル科学の研究の現場であった。

結論から言えばドレスト光子の研究においては数学と工学の連携「数工連携」が完全に機能している。今回は研究内容について述べる前段階として、この数工連携について自分の過去の経験とオフシェル科学の現状を交えて記述してみたい。（余談だが数工連携という言葉が自分の造語であることをこの原稿を書いている段階で初めて知った。特別な言葉だとは思わないので、今回はこのまま数工連携という言葉を自然に使っていくことにする。）

純粋な実験屋として研究を続けてきた自分が数学の研究者と初めて議論を共にしたのは2013年頃の話であり、現在の共同研究者である瀬川氏が九州大学マス・フォア・インダストリ研究所の短期共同研究企画を立ち上げるための工学側の相方を探していたときであった。当時取り組んでいた研究テーマを進めるためには実験面では技術と時間が不足しており、また数値計算の結果も直観に反しており周囲からの信頼が得られていないという八方塞がりの状況であった。状況の打開には数学しかないと考え、瀬川氏との共同研究を快諾した。この共同研究は結果として多数の成果の創出につながり、ある意味ではその分野の固定観念を打ち破ることにも成功した。そこに至る過程は平坦では無かったが、数学側と工学側の若手研究者同士が固定観念に縛られずに粘り強く議論を続けたことによって連携はある程度の成功を得たのだと信じている。

それまで全く縁の無かった現代数学との境界領域で研究を続けるうちに、「うまくいかない連携」を目にしたり体験したりすることも多くあった。ここではそれぞれの立場からの失敗例を列挙してみる。中には我々自身が陥った数多くの失敗の一例も含まれている。

<u>工学側の研究者の失敗例</u>

- 数学者と理論物理学者の区別がついておらず、理論構築の多くを数学者に求めすぎる
- 数学者の核心をついたせっかくの提案を固定観念に縛られて却下してしまう
- 数学の中にも多数の分野があり、それぞれに専門家がいることを理解していない
- 「スペクトル」などの分野によって異なる用語の意味を取り違える

・　定理→証明→具体例と展開される論文の書き方に慣れることが出来ない

数学側の研究者の失敗例

・　問題を整理するだけで仕事を終え、解決に至る手段や重要な具体例を議論しない
・　重要な発見を平易に示さず、難解な論証で提示する
・　実験研究に必要なリソース（資金・人材・時間）を軽く見る
・　工学にはいざとなれば絨毯爆撃数値計算という研究アプローチもあり、数学にそれ以上のものが求められているという実感を持たない

もちろんここに挙げた例はほとんどがお互いの偏見と誤解に端を発する行き違いである。連携を達成するためにはまずお互いの誤解を解くための対話、それもお互いの研究観を語り合うくらいの綿密な会話が必要となる。数学と工学の連携は掛け声だけで成立するものではなく、お互いがお互いの分野に深く踏み込むぐらいの相互努力が必要であり、両者が理解を深めることで初めて達成されるものであると考える。そのためには意欲ある学生や若手研究者のチャレンジ精神も重要な要素となる。

ところでドレスト光子の研究においては数学から工学に至る連携の様相は少し異なる。オフシェル科学の中心にあるのは量子場の物理であり、そこには数理物理学者という数学と物理をスムーズにつなぐ専門家が存在する。数学から工学に至る過程は以下のようになっている。

数学　→　数理物理学　→　理論物理学　→　計算物理学　→　実験物理学　→　工学

上記の流れで数理物理学の立場は特に重要であり、現代数学と現代の量子物理学を接続する役割を高いレベルで担っている。現代数学と理論物理学の間にある考え方・研究観の距離に比較すれば、理論物理学と実験物理学のそれの距離は意外に近い。またドレスト光子の考え方は既に間接遷移型の LED 開発など実用的な工学に応用されている。ドレスト光子とその背後にあるオフシェル科学は、まさに数理物理学を中心とした数工連携が機能する理想的な研究領域となっている。

実験物理や工学の研究者にとって現代数学は本当に魔法のように不思議で未知で役に立つ学問となっていることに疑いの余地はない。しかしながらあまりに研究観が異なるために、数学本来の使い道とは全く異なる要求を数学者に押し付けてしまっている例も多く見聞きする。工学の研究者は数学を利用したければ数学者の研究スタンスを深く理解すべきだし、数学者もそのことを理解して工学との連携を模索すべきである。以上は数工連携を実践する上で自身が得た結論だったわけであるが、ドレスト光子・オフシェル科学においてはその連携が驚くほどスムーズかつ効果的に行われていることに圧倒される。能力の高い多数の数理物理学者の参加と研究者間の綿密なコミュニケーションの賜物であると考えている。

Gel'fand-Naimark 定理、セクターとインストルメント

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

作用素代数の重要定理として、Gel'fand-Naimark 定理がよく知られている：任意の単位的な可換 C*-代数 $\mathcal{A}$ は、あるコンパクトハウスドルフ空間 S 上の複素数値連続関数のなす *-代数と同型

$$\mathcal{A} \cong C(S) \tag{1}$$

である。S は位相空間として $\mathcal{A}$ 上の指標全体 $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ と同型である。χ が $\mathcal{A}$ 上の指標であるとは以下の条件を満たす $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ のことをいう：

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ および $A, B \in \mathcal{A}$ に対し，$\chi(aA + bB) = a\chi(A) + b\chi(B)$。

(2) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し，$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$。

このとき，(1) 式の同型は各 $A \in \mathcal{A}$ に対し $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 上の関数 $\hat{A}(\chi) = \chi(A)$, $\chi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ を与える写像（Gel'fand 変換）$\iota : \mathcal{A} \ni A \mapsto \hat{A} \in C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}))$ で与えられる。更には，$\mathcal{A}$ 上の線型汎関数 ω と $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 上の Radon 測度 μ が一対一対応する（Riesz-Markov-Kakutani の定理）：

$$\omega(A) = \int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A})} \hat{A}(\chi)\, d\mu(\chi), \qquad A \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

同様の結果が可分な前双対をもつ可換 von Neumann 代数 $\mathcal{C}$ に対しても成立し，$\mathcal{C}$ は或る局所コンパクトハウスドルフ空間 Γ とその上の Radon 測度 λ から定義される $L^\infty(\Gamma, \lambda)$ と von Neumann 代数として同型である。これらの結果については多くの作用素代数の教科書に記述がある（例えば [1]）。

上の一連の結果は可換な場合特有の成果であり，一般の非可換の場合にはそのまま成立する定理ではない。可換のときは，状態（規格化された正値線型汎関数のこと）を定めるごとに確率空間が定まることを上の結果は示しており，古典確率論の形式を有界な複素確率変数に対し再現する。

非可換の場合に Gel'fand-Naimark 定理の拡張する方法はいくつかあるが，最も単純な拡張が表現論的な定式化である竹崎および Bichteler の結果である。このアプローチはちょうど局所コンパクト群に関する可換群についての Pontryagin 双対性から最も一般の辰馬双対性への拡張と並行したものになっている。

竹崎および Bichteler の結果も重要であるが，上の確率論的な形式の拡張を非可換においても拡張する際，小嶋 [2] によって導入された「セクター概念」が関係してくる。C*-代数 $\mathcal{X}$ で記述される系におけるセクターはある因子状態 ω の「準同値類」として定義される。任意の状態 ω に対して表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ および $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ で

$$\omega(X) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle, \qquad X \in \mathcal{X} \tag{3}$$

および $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たすものがユニタリー同値を除いて一意に存在する (3 つ組 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ を ω の GNS 表現と呼ぶ)。$\mathcal{X}$ 上の 2 つの状態 ω_1 と ω_2 は GNS 表現 π_{ω_1} と π_{ω_2} を通じて定義される状態の集合が一致する，すなわち，$\mathcal{S}_{\pi_{\omega_1}}(\mathcal{X}) = \mathcal{S}_{\pi_{\omega_2}}(\mathcal{X})$ であるとき準同値であるという。ここで，$\mathcal{X}$ の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対し，$\mathcal{S}(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ 上の状態の集合，$\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の集合を表すとき，$\mathcal{S}_\pi(\mathcal{X}) = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{X}) \mid \exists \rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \phi(X) = \mathrm{Tr}[\pi(X)\rho],\ X \in \mathcal{X}\}$ である。一方，ある状態 ω は，$\pi_\omega(\mathcal{X})$ から生成される von Neumann 代数の中心 $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{X})$ が自明であるとき因子で

あるという。因子状態はマクロな秩序変数の値が確定した純粋相に対応している。このとき，セクターとは秩序変数が確定した状態全体を一括にして扱うことに他ならない。ミクロな系が「所有する」物理量に対し，物理量のなす代数上で定義される状態およびセクターがマクロな「質」の区別・分類を行う役割を果たすのである。因子とは限らない一般の状態 ω に対しては，ω を因子状態に積分分解する $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ 上の確率測度 μ_ω （ω の中心測度と呼ばれる）および von Neumann 代数の同型写像 $\kappa_\omega : L^\infty(\mathcal{S}(\mathcal{X}), \mu_\omega) \to \mathcal{Z}_\omega(\mathcal{X})$ が存在して

$$\langle \Omega_\omega | \kappa_\omega(f) \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle = \int f(\rho)\ \rho(X)\ d\mu_\omega(\rho), \qquad f \in L^\infty(\mathcal{S}(\mathcal{X}), \mu_\omega), X \in \mathcal{X} \tag{4}$$

が成り立つ。すなわち、一般の状態においてもその中心測度を用いることで，その状態を積分分解して得られる因子状態の準同値がセクターを定める。そして，中心の元が異なるセクターを区別する。

量子系においてマクロと聞けば，量子測定理論が頭に浮かぶ人がいると思う。量子測定理論の中心概念は「インストルメント（instrument）」[3] と呼ばれる，測定装置のメーターの出力と対応させて系の確率的重み付き状態変化を記述する写像である。これまではインストルメントは von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の前双対 $\mathcal{M}_*$ （$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_*)^*$ を満たす Banach 空間で、$\mathcal{M}$ が定義される Hilbert 空間上のトレースクラス作用素を用いて定義される $\mathcal{M}$ の上の線型汎関数の集合と一致する）において定義されてきた。インストルメントおよび近年の量子情報理論に関する重要な結果は [4] に依るところが大きい。しかし，量子場などを記述するために必要な一般の von Neumann 代数上で定義されたインストルメントについての解析は [5] でようやく大きな進展を見せた。とはいえ，一般の C*-代数 $\mathcal{X}$ 上で定義するとなると，数学的に適切な一般化や物理的に意味のある状況の指定などが理由で定義および解析方針がなかなか定まらなかった。しかし，その解決のヒントがセクター理論にあったのである。[6] において，$\mathcal{X}$ の双対空間 $\mathcal{X}^*$ の「中心部分空間」を用いて，von Neumann 代数の場合も含むように，懸案の C*-代数上での定義を完成させた。しかも，[6] より更に研究は進展していて，どうやら C*-代数上で定義されたインストルメントを用いれば上の中心測度による状態の積分分解の理論も，インストルメントを通じて正確に測定理論的に解釈できそうなのである。Gel'fand-Naimark 定理などの基本的成果から量子測定理論の中心概念であるインストルメントまで，一貫した理解が可能になる段階もあと一歩のように思う。

参考文献

[1] 梅垣壽春，大矢雅則，日合文雄,『作用素代数入門』，(共立出版, 1985).

[2] I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics. In *Stochastic Analysis: Classical And Quantum: Perspectives of White Noise Theory*, (World Scientific, 2005) (pp.143–161).

[3] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17**, (1970), 239–260.

[4] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, J. Math. Phys. **25**, (1984), 79–87.

[5] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, J. Math. Phys. **57**, (2016), 015209.

[6] 岡村 和弥, A C*-algebraic approach to quantum measurement, 数理解析研究所講究録 **2123**, (2019).

ドレスト光子と縦光子・不定形量

安藤 浩志 (千葉大理)

前回の記事では Coulomb ゲージにおける量子電磁場について紹介しました。これを（形式的な議論ですが）正準量子化の観点からもう一度見てみます。Maxwell 方程式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \varepsilon_0^{-1}\rho(\boldsymbol{r},t),\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= 0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\end{cases}$$

を 4 元ポテンシャル $A^\mu=(\frac{1}{c}\phi,\boldsymbol{A})$ で書き換えます: $\exists\boldsymbol{A},\exists U$s.t.

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}=-\partial_t\boldsymbol{A}-\nabla\phi$$

より,

$$\Delta\phi=-\varepsilon_0^{-1}\rho-\nabla\cdot\partial_t\boldsymbol{A}, \tag{1}$$

$$\Box\boldsymbol{A}=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{J}-\nabla\Lambda, \tag{2}$$

$$\Lambda:=\partial_\mu A^\mu=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+c^{-2}\partial_t\phi$$

となります。これは Lagrangian $\mathscr{L}^{\rm st}=\mathscr{L}^{\rm st}_{\rm Rad}+\mathscr{L}_{\rm I}+\mathscr{L}_{\rm D}$ の Euler–Lagrange 方程式から得られます。ここで

$$\mathscr{L}^{\rm st}_{\rm Rad}=-\frac{\varepsilon_0 c^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=\frac{\varepsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2),$$
$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

が電磁場部分、

$$\mathscr{L}_{\rm D}=\frac{i\hbar c}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-(\partial_\mu\overline{\Psi})\gamma^\mu\Psi-mc^2\overline{\Psi}\Psi$$

が荷電粒子場 (Dirac 場) 部分、

$$\mathscr{L}_{\rm I}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}-\rho\phi=-J_\mu A^\mu,\ J_\mu=(c\rho,-\boldsymbol{J})$$

が相互作用項です ($\rho=q\tilde{\Psi}^*\Psi$, $\boldsymbol{J}=qc\tilde{\Psi}^*\boldsymbol{\alpha}\Psi$) Euler–Lagrange 方程式を解くと A^μ で表した Maxwell 方程式 (1)(2) が得られます。A^μ の共役運動量 $\Pi_{A^\mu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^\mu}$ との間に正準交換関係を課し (Hilbert 空間への表現を決め) て、量子化を行うのですが、$\mathscr{L}^{\rm st}$ に $\dot{\phi}$ が無いため、A^0 の共役運動量は 0 となり、このままでは量子化が行えません。Maxwell 方程式のゲージ変換

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi,\ \phi'=\phi-\partial_t\chi$$

に対する不変性を用いて Coulomb ゲージ条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を課して “量子化に不要” な自由度 ϕ を消去します。 Maxwell 方程式を用いて A^0 を Lagrangian から消去し, その後 $\boldsymbol{A}$ の縦成分 $\boldsymbol{A}_{\rm t}$[1]を 0 と置いて量子化するという手順です。この場合 $\boldsymbol{E}_\ell=-\nabla\phi$ であり、ϕ は Coulomb ポテンシャルに一致します。一方で A^0 も A^j 達と対等に扱って量子化を実行する方法もあります (詳しくは [1, 2, 3] をご参照下さい)。これを実行するには、$\mathscr{L}^{\rm st}_{\rm Rad}$ にゲージ固定項と言われるものを適切に付加し、A^0 の共役運動量が定義できるように、しかし Lorentz 条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ の下で A^μ の運動方程式が保たれるようにします。例えば次の様にします:

$$\mathscr{L}^{\rm st}_{\rm Rad}\to\mathscr{L}_{\rm Rad}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu).$$

この時 $A_s:=A_0=\frac{1}{c}\phi$ 及び A_j $(j=1,2,3)$ の共役運動量は

$$\Pi_s=-\varepsilon_0\dot{A}_s,\ \Pi_j=\varepsilon_0\dot{A}_j$$

となります。Π_s に現れる負符号は Maxwell 方程式の構造、あるいは相対論的構造に依っており、避ける事ができません。この符号の影響を受け、電磁場部分の Hamiltonian の正定値性が破れてしまいます: $t=0$ で $A_\mu(\boldsymbol{r})=A_\mu^+(\boldsymbol{r})\Leftrightarrow\mathscr{A}_\mu(\boldsymbol{k})=\mathscr{A}_\mu^+(-\boldsymbol{k})$ etc とし, k-表示で適当な Hilbert 空間において CCR を要求します:

$$[\mathcal{A}_\mu(\boldsymbol{k}),\Pi_\nu(\boldsymbol{k}')^+]={\rm i}\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\ \mu,\nu=0,\ldots,3.$$

そこで消滅演算子 a_j,a_s を

$$a_j(\boldsymbol{k})=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}(\omega\mathscr{A}_j(\boldsymbol{k})+\frac{\rm i}{\varepsilon_0}\Pi_j(\boldsymbol{k}))$$
$$a_s(\boldsymbol{k})=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega}}(\omega\mathscr{A}_s(\boldsymbol{k})-\frac{\rm i}{\varepsilon_0}\Pi_s(\boldsymbol{k}))$$

[1]関数 $V(\boldsymbol{r},t)$ の 3 次元 Fourier 変換 $\mathcal{V}(\boldsymbol{k},t)$ を $\mathcal{V}=\mathcal{V}_\ell+\mathcal{V}_{\rm t}$ と、$\boldsymbol{k}$ と平行な縦成分と、直交する横成分に分解し、Fourier 逆変換を施して $V=V_\ell+V_{\rm t}$ と表します。

とすると,

$$[a_i(\boldsymbol{k}), a_j^+(\boldsymbol{k}')] = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),$$
$$[a_s(\boldsymbol{k}), a_s^+(\boldsymbol{k}')] = -\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

となるため

$$H_{\mathrm{Rad}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\frac{\hbar\omega}{2}[\sum_{i=1}^{3}(a_i(\boldsymbol{k})^+ a_i(\boldsymbol{k}) + a_i(\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k})^+) - (a_s(\boldsymbol{k})^+ a_s(\boldsymbol{k}) + a_s(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})^+)]$$

となります。この負号問題を解消するためには 4 光子 A^μ のテンソル積 BosonFock 空間を考える際に正定値内積を放棄し、新たに不定計量 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を導入し、通常の随伴を不定形量に関する随伴に置き換えます。さらにテンソル積 Fock 空間の中で、Gupta–Bleurer–中西–Lautrup の補助条件と呼ばれる条件を満たすベクトル達のなす空間に制限します (物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ と呼ばれます): k-表示で書くと、これは項 $\Lambda = \partial_\mu A^\mu$ が (相互作用がある場合でも) 波動方程式 $\Box\Lambda = 0$ を満たす、という著しい性質を用いて, その正振動数部分で消される $\Lambda^{(+)}\Phi = 0$ ベクトル達、と表現されます。この量子化の手続きに於いては、$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ には s-光子も縦光子も現れませんが、例えば Coulomb ポテンシャルを記述する中間状態として現れ、重要な役割を果たします。$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ のみに物理的情報があると考えるのではなく、s-光子・縦光子と不定形量を伴った全体系を考察する事が今後のドレスト光子研究にとって有用ではないかと考えています。不定形量とそれに伴う不安定方向の成分が凝縮とマクロ化という現象の本質にかかわるという事は小嶋泉氏のミクロ・マクロ理論 [7] に基づいた同氏の講演 [6] で初めて明確にされました。私は量子電磁場のセクター構造 (無限自由度の量子系であるが故に、量子電磁場は沢山の表現と、その背後にある表現される量子場を区別し無ければいけません [4, 5, 7]）を理解する上で、不定形量空間の上の作用素としての A^μ 達の構造を調べることに興味を持って研究を行っています。

謝辞

本研究は (社) ドレスト光子研究起点の助成を受けています.

参考文献

[1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupon-Roc and G. Grynberg, Photons and atoms, John Wiley & Sons (1997).

[2] A. S. Wightman, L. Garding, Fields as Operator-valued Distributions in Relativistic Quantum Theory, Arkiv f. Fysik, Kungl. Svenska Vetenskapsak. 28, 129–189 (1964).

[3] N. Noboru and I. Ojima, Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity. World Scientific Lecture Notes in Physics, 27. World Scientific Publishing (1990).

[4] 大津元一編 ここからはじまる量子場 (朝倉書店), 2020

[5] 岡村和弥・小嶋泉, 無限量子系の物理と数理 (SGC), 2013.

[6] 小嶋泉, “マクロ化創発のパラドクス–鞍部点での安定不安定モードと Morse 理論–” 講演スライド (2017)

[7] 小嶋泉, 量子場とミクロ・マクロ双対性 (丸善出版), 2013.

〈状態〉とは何か

西郷　甲矢人 (長浜バイオ大学)
E-mail: h_saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

学問においては、その分野において特別な意味で用いられる語が多々ある。例えば「仕事」という言葉は、日常では人間が生きるために（あるいは生きる目的として）行う様々な労働を指すが、物理学では力と距離の積によって量られる物理量を指している。その定義をはっきりさせていないと、奇妙なマチガイを犯してしまうことは、物理学を多少なりとも学んだ人はよくご存じのことであろう。しかし、「仕事」よりもさらに「当たり前」に使われすぎていて、位置づけがごく近年になるまで明快に理解されなかった物理的な概念が存在する。「状態」がそれである。

状態という語は、日常的によく用いられる語であり、その延長上で何となく理解可能であるために、永年にわたって徹底的な分析がなされては来なかった。現在でも、多くの学生たちは教科書を通じて次のように理解していると思われる：ある物理系、たとえば電子の「状態」というものは、なにかよくわからないがその「電子の在り方」に違いなく、なぜそう考えるのが適切であるかはよくわからないが何らかのヒルベルト空間のベクトルとして表されるらしい。いや、より正確にはこうした状態というのはどうやら「純粋状態」と呼ばれるべきものであり、どうも「混合状態」というものを理解するには密度作用素というのを使わなければいけないらしい…。

あまりにも戯画的に描いてしまっているかもしれないが、通常、状態をめぐる理解というものがこうした場当たり的な理解の積み重ねとなりがちであることは事実である。もちろん理解というものがいつも最初から明快であるべきというわけではない。しかし、上のような理解には明らかな問題点が存在している。「純粋状態」「混合状態」などという言葉の前提には、そもそも状態とは何か？という問いが先立ってしかるべきなのに、そうはなっていない、という点である。実は、量子論の偉大な先人たちの議論の中ですらそうで、どうやらそれが種々の「パラドクス」の根源となっていたようなのである。

「状態とは何か」という問いに対する「数学的な定義」は、量子場の理論の数理的取り扱いの中から生まれてきた。それは、「物理量の代数」から「複素数」への線型写像であって、「正値性」および「１」を保つものである、という定義である。これは、直観的にいうと、「状態とは、各物理量に対してその『期待値』を対応される写像である」ということを意味する。ご存じのように、確率変数にその期待値を対応させる写像は線型性を持ち（「足したものの期待値は期待値を足したもの」）、正値をとる確率変数の期待値は正であり（何しろ確率は正値だから）、「ずっと 1」という確率変数の期待値はやはり 1 である（確率の総和は 1 だから）。このような「期待値を対応させる写像」の概念こそが、状態なのである。古典的な確率変数の場合と異なり、量子論においては物理量の代数が非可換となり、それによって、それらの物理量を古典的な意味でのひとつの確率空間上の関数たちとして解釈することはできなくなるのだが、「期待値を対応させる写像」の概念は自然に一般化することが可能であり、それが最も一般的な意味での「状態」の概念なのである（この枠組みで、「純粋状態」「混合状態」とは何かなども正確に定義できるが、ここでは割愛する）。

上のような定義と、多くの量子論の教科書にある「ヒルベルト空間のベクトル」という話がどうつながるのか疑問に思う読者も多いであろう。実はここに「GNS（ゲルファント・ナイマルク・シーガル）構成」という簡潔かつ強力な数学的な手続きがあって、上のような定義での状態から、それに付随したヒルベルト空間を構成することができ、物理量の代数はそのヒルベルト空間上の線型作用素たちのなす代数の一部と考えることができ、かつ、出発点であった状態はそのヒルベ

ルト空間の単位ベクトルによって表現することができるのである。ここで重要なことは、このヒルベルト空間は基準となる状態「ごとに」造られるのである、ということである。ひとつの物理量の代数の上に多種多様な状態がありえて、その状態を通じて、ヒルベルト空間という舞台への「表現」が多種多様に構成されるわけである。

さて、ここで「表現」という言葉が出てきた。これもまた日常でよく使われる語であるが、数学では特有の意味を持って用いられる。大まかに言えば、表現というのは、あるひとつの「理解したいが、漠然としていてはっきりとはつかめないもの」のある側面を、「理解しやすいもの」に翻訳するような（構造を保つ）写像を意味する。たとえば、線型代数で学ぶように、平面や空間における運動、たとえば「回転」や「鏡映」といったものの性質を「行列」の話に翻訳して考えることができるが、この翻訳の仕方が表現の一例である。その際、どのようなベクトルを「基底」にとるかによって、「同じ」運動も「異なる」行列に翻訳されうるのである。このように、表現は、同じものの多種多様な現われ、という文脈において理解されるべきものである。

まとめると、状態は表現を与えるものであり、表現とは「同じものの多種多様な現われ」のひとつだ、ということになる。ここまでは数学の話であり、物理学者が異論を差しはさむことはないであろう。しかし、このことの「概念的な意味」を掘り下げると、いままで多くの物理学者が「直観的に」「自明に」考えていた「状態」の物理的な意味が、大きな変革を受けなければならないことがわかる。すなわち、状態は「物理系に内属するものではない」ということである。

読者は、「いったい何を言っているのか？」と思われるかもしれない。「電子の状態」というのだから、それは「電子そのものの在り方」に決まっているではないか、と。しかし電子とは一体何であろうか。それは究極のところ、一種の量子場であり、量子場とは、ある時空領域において定義された物理量の束のようなものである。ある時空領域を固定して考えるならば、それは物理量代数そのものである。こうしてみると、系に内在的な性質というものは、「物理量代数」だと考えるのが自然であろう。だとすれば状態とは何だろうか。その数学的な定義は各物理量に対して期待値を対応させる写像であった。では、「電子そのもの」が「持っている」諸性質を、現実に測定可能なデータ、期待値のレベルまで「引き出す」ことを可能にするのは何であろうか。見えないミクロの性質を、マクロに「現実化」するために必要なのは、（よりマクロの）「環境」である。そうしてみると、状態とは、物理系に内属するものではなく、系と環境との相互関係によって定義されるものと考えるべきである、との考えに至る。

こうした状態概念の捉え方を、「状態とはインターフェイスである」という言明として最初に明確に指摘したのが、現在ドレスト光子研究起点顧問である小嶋泉であった。筆者は、この状態概念の根本的な変革こそが、量子論の解釈の（見かけ上の）「パラドクス」を一掃するとともに、これまでオンシェル概念に相当に縛られてきた量子場の研究を前進させるカギであるととらえ、小嶋泉とその共同研究者である岡村和弥とともに研究を続けてきた。その過程において、「系と環境の合成系」を考え、その「合成系」の環境（いわば「メタ環境」）を考えるという入れ子型の構造の重要性が理解されるようになってきた。ドレスト光子（それ自体が光とナノ物質の合成系である）の状態とは何か？ということを考えるためには、それをとりまく環境との相互関係を問題にしなければならない。また、それだからこそ、ドレスト光子は環境に応じて変幻自在な働きをなしうるのである。このように、ドレスト光子をはじめとする「オフシェル」の領域の研究対象に迫るためには、どうしてもこうした概念的な基盤の整備が必要なのである。樹木が伸びるためには、どうしても根を深く張らなければならないのと同じである。

ドレスト光子の基底関数

三宮 俊（株式会社リコー）
E-mail: suguru.sangu@jp.ricoh.com

「ドレスト光子を、その物理現象のイメージに即した基底関数で記述したい」というのは、筆者がドレスト光子の理論研究に着手した当初から思い悩み、未だ解決できていない課題である。最近の筆者らの研究において、基底関数に関する幾つかの考察を行っており、本稿では、その内容の背景にある思考や狙いについて触れてみたい。発展途上の内容につき、表現が直感的であり、正確性に欠ける点はご容赦いただきたい。

基底関数とは、ある関数（状態）をあらかじめ用意した別の関数群の線形結合として表す際の、その関数群のことを意味している。自由光子の場合には、場の空間並進対称性を前提に指数関数を用いた平面波基底として表され、伝搬モードとして解釈される。電子や励起子のような物質中の素励起も同じく（結晶を構成する原子の）空間並進対称性に基づく Bloch 基底や、そのフーリエ変換によってキャリアの局在性を表現した Wannier 基底などで表される[1]。そして、第二量子化の手順を経て、量子の生成・消滅という描像で光子や物質励起を取り扱うことができるようになる。基底関数はその重み係数の分布を局在させるように、換言すると、少数の基底関数で状態を記述できるように選ぶことで「見たい物理現象」を理解し易い書式に焼き直す役割を担っている。

ドレスト光子の基底関数をどのように考えるかであるが、その前に、十数年前に検討した理論を振り返っておきたい。その理論では、自由光子と無限に広がる物質系における励起子との混合状態として記述される励起子ポラリトンを考え（自由光子場の空間並進対称性を残し）、二つの物体間における仮想的な励起子ポラリトンを介したエネルギー移動（状態遷移）をドレスト光子現象と見なし[2]、幾つかの現象（例えば、光学禁制準位へのエネルギー移動など）の説明を行った[3]。このモデルは、量子ドットのような孤立した二準位系ないしは少数準位系間のエネルギー移動、例えば、時間分解分光計測における緩和時間の見積もりなどにおいては成功していたように思われる。しなしながら、ドレスト光子なるものを露わに記述しておらず、例えば、ドレスト光子のサイズ選択性（近接場光プローブのチップサイズに依存して取得される像が異なる現象）などは、基底関数という視点からはうまく表現できていない。

まず初めに、ドレスト光子に対する「見たい物理現象」を説明しておきたい。ドレスト光子研究起点での理論検討に参加するようになり、微細構造の端部におけるドレスト光子の局在現象と逆正弦法則として知られる確率分布との類似性から、ドレスト光子をモデル化するアイデアをいただいた[4]。調和振動子（すなわちドレスト光子）の高励起状態が逆正弦関数に漸近することと、ドレスト光子の存在確率が構造端部で増大することが同じメカニズムで説明できる、という理解である。逆正弦関数には定義域が存在し、定義域が狭いと局在部分が強調され、定義域が広い場合には確率が一様とのなる領域が支配的になる。この状況が、ドレスト光子がナノスケールの微細構造近傍に局在し、巨視的な領域では自由光子と同様に振る舞う（位置が不確定になる）という状況に対応し

ている。この描像にしたがうと、ミクロ系からマクロ系への接続が一貫して説明できるようになると思われる。これが、現時点で筆者が思い描くドレスト光子の基底関数のイメージである。

ここ数回の応物学会において、数値シミュレーションを拠り所に基底関数の選択方法に関わる議論をさせていただいた。本数値シミュレーションでは、テイパー構造を格子点の集合と見なし、各格子点におけるドレスト光子の量子密度行列の時間発展を算出している。ドレスト光子の空間分布に物理的な解釈を与える（見たい物理現象を抽出する）ために、二つの基底変換手法を考案した。一つは、Hadamard 変換という 1 と-1 で構成される基底関数を用いるものである。この Hadamard 変換を人為的に切り出したサイズの異なるブロックごとに割り当てることで、格子点で表される構造体ブロックを重心位置とサイズ（格子点数）で決まる内部構造（第一励起状態、第二励起状態、・・・）とで記述している[5]。このような基底変換を施すことにより、上述したような定義域の異なる逆正弦関数が連なった階層構造のようなものは表現できたが、ミクロ系からマクロ系へ向かう不可逆なエネルギー移動といった物理的イメージは再現できていない。人為的な構造分割では物理現象を十分に捉えきれず、何かしらの集約化の指針が必要となっている。

二つ目のアイデアは、定常（平衡）状態でドレスト光子の空間分布が静的であることに着目し、定常状態の量子密度行列に対する対角化行列を求め、その行列を用いて基底変換を行う方法である[6]。この検討は、基底関数の重み係数の分布を最小化することで、特徴的なエネルギー移動の経路が可視化できるのではないか、という期待のもとに進めている。未だ試行錯誤の段階ではあるが、局在性を強く示す基底と、伝搬モードを示唆する空間分布をもつ基底を見出すことはできている。一方で、ミクロ系とマクロ系の特性が混在したような基底関数も存在し、こちらもイメージ通りの結果には到達できていない。もう一工夫、核心に迫る概念が必要と感じている。

このようにドレスト光子の描く物理現象に即した基底関数の探索は一進一退な状況にあるが、上記の二つの手法には共通して、有限系の幾何学的構造を反映した基底関数を準備するという基本方針が念頭にある。そしてドレスト光子が介在する興味深い物理現象の幾つかでは、ドレスト光子が物体構造を動的に変化させ（原子置換や化学反応を促し）、自律的に最適構造に落ち着く様が実験的に示されている。ドレスト光子の居心地の良さが、基底関数の候補を探る一つの指標になるのではないかという想像を抱きながら、次のアプローチ方法を模索中である。

参考文献

[1] 例えば、花村，「非線形量子光学」（培風館，1995）など.

[2] K. Kobayashi, et al., Phys. Rev. A 63, 013806 (2000).

[3] S. Sangu, et al., Phys. Rev. B 69, 115334 (2004).

[4] H. Saigo, “Quantum Probability for Dressed Photons: The Arcsine Law in Nanophotonics” in Progress in Nanophotonics 5, T. Yatsui (ed.) (Springer, 2018).

[5] 三宮・他，第 80 回応用物理学会秋季学術講演会, 19p-E314-6 (2019).

[6] 三宮・他，第 67 回応用物理学会春季学術講演会，14p-B309-15 (2020).

ローレンツ対称性の破れとドレスト光子

坂野　斎

山梨大学工学部 *

(Dated: August 28, 2020)

前に「化学反応とドレスト光子」というタイトルで書いた記事 [1] は,「超伝導体の応答である反磁性電流は，一般的な物質に遍く内在している」という趣旨のフリッツ ロンドンの指摘を動機としたものでした．具体例として，生体内で大切な化学反応を担うヘムにおいて，中心の鉄イオンの高スピン状態への応答として反磁性電流が存在するであろうこと，それが電流密度-電流密度相互作用とみなせること，その相互作用は局在するベクトルポテンシャルに介在されるものであること，ヘムの関わる化学反応＝共有結合の開裂には物質に内在するオフシェル-ベクトルポテンシャルが関わっているであろうことを述べました[1].

さらに，一般的な話として，物質内にある電流密度-電流密度相互作用を担うベクトルポテンシャルは，ちょうど，電荷密度-電荷密度相互作用を担うスカラーポテンシャルに対応する役割をしているのに同じ資格で扱われないこと，このように物質に内在して相互作用を担うスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルは輻射場＝オンシェル電磁場と異質のオフシェル電磁場であり，この文脈においてオフシェル電磁場の量子化＝ドレスト光子の量子場としての理解は未解決の問題であることを述べました[2].

この記事では，物質に内在するオフシェル-ベクトルポテンシャルの源泉としての電流密度，及び，電流密度-電流密度相互作用について他の例を探索し，それらと非相対論性=ローレンツ対称性の破れが関わっていることを述べたいと思います．簡単にいえば，電流密度やベクトルポテンシャルという 3 元ベクトル場を電荷密度場やスカラーポテンシャルというスカラー場と別の自由度として認知する前提には，非相対論系として原子核の平均位置が静止してみえる座標系を採用している，ということがあるのです.

---

*Electronic address: banno@yamanashi.ac.jp

[1] 非相対論系である物質系での電磁ポテンシャルのゲージとして，クーロンゲージを採用します．そうすると，ベクトルポテンシャルは横成分だけになり，横電流密度-横電流密度の相互作用を担い，スカラーポテンシャルは電荷密度-電荷密度相互作用を担います．役割が明確に分けられわかりやすくなります.

[2] 「化学反応とドレスト光子」の最後の文章 :「ロンドンの先見的な考えは，オフシェル電磁場の量子化という根本的な問題と関係しています.」はいささか，藪から棒でしたので，この場をお借りして補足させていただきます.

思いつくまま，物質内の電流密度とその間の相互作用を列挙してみます：

✓ 電子や原子核がもつスピンは磁気双極子モーメントを伴い，これはさらに局所的な磁化電流に焼き直せます．従ってスピン-スピン相互作用は電流密度-電流密度相互作用と見なすことができます．

✓ スピン-軌道相互作用は，　電子の内部自由度であるスピンに伴う磁気双極子モーメント＝磁化電流密度と外部自由度である運動量に伴う電流密度の相互作用とみなせます．

✓ 原子核（または，電荷をもったイオン殻）の運動は電流密度と内在する電磁場をもたらします．特に，TO フォノン（横光学フォノン）は，フォノンの進行方向に垂直な方向の電流密度＝横電流密度を伴い，オフシェル-ベクトルポテンシャルの源泉となり，電子の運動量と相互作用をすることができます．これも電流密度-電流密度相互作用といえます．

このように，固体物理学や化学に登場する相互作用を，根本的な電磁相互作用という観点から整理することが，内在電磁場＝ドレスト光子の理解につながると考えていますが事態はそれほど簡単ではありません．上記の項目について，順に考えていきましょう．

直接のスピン-スピン相互作用はディラック方程式の非相対論的極限として導出されるパウリ方程式中のスピンと磁場結合の項から得られます；この磁場の源泉としてスピンを考えたときのものがベクトルポテンシャルを介するスピン-スピン相互作用となります．この相互作用は，小さいものとして通常は無視されますが，局所スピンの原子スケール近傍でのオフシェル-ベクトルポテンシャルは化学反応に有意に寄与できる大きさであることは前の記事でも触れました．

直接のスピン-スピン相互作用ではないですが，いわゆる交換相互作用はスカラーポテンシャルが担う電荷密度-電荷密度相互作用（電子間クーロン相互作用）に電子の場の反交換関係を考慮することで現れます．ベクトルポテンシャルを介する相互作用ではありませんが，非相対論系であることを前提として導出される物質に内在して相互作用を担うスカラーポテンシャルと量子場のインタープレイにより現れます．それは，多様な物質の有り様の原因となっています．たとえば，交換相互作用は，原子中の電子がなるべくスピンをそろえるように働き，フントのルールの原因です．一方，原子から分子ができるときには近隣に他の原子核があることで電子の行き来できる範囲がひろがることにより零点エネルギーの得が交換相互作用の得にまさり，高スピン状態が消えて共有結合ができると考えることもできます．交換相互作用を電流密度-電流密度として見ることで，何がわかるのかは今は不明ですが，すくなくとも，スピンを磁化電流密度とみると，ベクトルポテンシャルを伴っていることは確

かです．この内在するオフシェル-ベクトルポテンシャルを含めた物質系の自己無撞着な議論はまだありません．

スピン-軌道相互作用は，ディラック方程式を非相対論系へ還元するときにパウリ方程式導出の次の段階の近似で現れる相対論的効果の一つです．スピン-軌道相互作用は，出発点とするディラック方程式でベクトルポテンシャルがなくともスカラーポテンシャルがあれば導出されます．スピン-軌道相互作用についても，スピンを磁化電流密度とみるとベクトルポテンシャルを伴うので，交換相互作用のときと同様に物質系がこのオフシェル-ベクトルポテンシャルを含めてどのように自己無撞着に決まっているのか，という未解決な問題があります．

つぎに，フォノンですが，この低波数成分は系全体のエネルギーを変えることなく平行移動，回転移動をもたらすものですので，ローレンツ対称性の破れにより生じる南部-ゴールドストンボソンといえます．このような大域的なモード，とくに大域的な光学フォノンにともなうオフシェル-ベクトルポテンシャルと電子の結合は議論されていないのが現状です．

さて，物質に内在するベクトルポテンシャルを探索するために，スピンや光学フォノンにともなう電流密度とそれが関わる相互作用に注目して考察をしてきました．その電流密度は内在するベクトルポテンシャルの源泉である一方，それが参加する相互作用は，スカラーポテンシャル，量子場の効果も関わり複雑です．しかし，電流密度に関わる現象に共通のこととして，非相対論的極限で現れる，または，認知されることがあります．物質に内在する相互作用の担い手として内在するオフシェル電磁場＝ドレスト光子を考えるときには，非相対論系であること＝ローレンツ対称性の破れを前提とし，相対論的効果や南部-ゴールドストンボソンを必要に応じて取り入れていくことが鍵と思われます．

---

[1] 坂野 斎. 化学反応とドレスト光子, 2019. http://rodrep.or.jp/wp-content/uploads/2019/12/Bannno_20191225.pdf.

真夏の夜の“物理怪談”

佐久間弘文、ドレスト光子研究起点

少し前に、大津先生から皆さんへ、「電磁波の縦波の事をまとめた資料を off-shell archive に置いたので、ご覧ください」との連絡があったと思います。実は、一か月程前だと思いますが、これまでの自分が取り組んで来た研究を振り返った時に、自分ではとても信じられない程“不思議な事態”が光学分野にはあるという事を大津先生にお話ししました。それは、電磁波の縦波についての知見の共有に関しての事です。この事を大津先生にお話ししたところ、さっそく色々な文献を調べて、結果をまとめて頂き、私自身とても勉強になりました。ドレスト光子研究に参入する前の私にとって光学は、そういう学問があるという言葉だけの存在でした。世間にあふれている学生向けの電磁気の本は、大分以前に“教養”の一環として勉強した事はありますが、そこには光の縦波の事など書いてありませんでしたので、漠然と真空中を伝わる電磁波は横波のみと思っておりました。しかし、事情をよく調べてみると全く違っていてびっくりしました。今回は、「びっくりした」その経験を、コメディー風に書いてみました。

私が小、中学生の頃は、夏の暑い時期になると、TV 等で講談師が「怪談もの」をやっているのをよく見かけた記憶がありますが、最近は、その様なものを目にする事はほとんどなくなりました。この「怪談もの」の話が成立する為の大前提は、言うまでもなく、人間は肉体的な死ですべてが終わるのでは無く、その後も何等かの“エネルギー体”として意識が存続するという事で、その“エネルギー体”は一般に霊と呼ばれています。古今東西に関わらず、人間の社会においてこの霊という言葉が無い社会は無いように思われます。しかし、特に戦後の日本社会においては、経済活動に全く関係の無いような霊というものは、多くの人の関心の「外」に置かれているのも事実で、ある人たち（グループ A）にとって霊の存在は当たりまえなのに、別の人たち（グループ B）は、そんなものは無いと断言して憚らないという状況があります。しかし、その他大勢の人々は、その真偽にあまり関心が無い為に、万人がわかる様に、その真偽を確かめようとする真面目な試みは、少なくとも日本においては、今は無いように見受けられます。

今回のオフシェルフォーラムの記事を書くにあたり、何でこの様な物理とは関係の無い話を持ち出したかというと、実は物理・工学界の中にも「上で触れた霊に対する態度」と同じ様なものがあり、“事情”を知らなかった私は、当初大変面食らってしまった経験があったのです。今回は、その事を是非皆さんに共有したいと思って、少々不謹慎かもしれませんが、この寝苦しい熱帯夜に「一抹の涼」をもたらすべく、話のタイトルをこの様にしました。

私が取り組んだドレスト光子の研究において、電磁波の縦波は重要な要素の一つでした。長らく地球流体の分野にいた私にとって流体中を伝わる波には、横波と縦波がある事は、それこそ入門書に書いてある知見でありましたが、電磁気学では事情が大きく変

わっていました！大学生向けの電磁場理論の専門書には、どこを探しても電磁波の縦波の記述が無いのです。（元来、私は探し物が苦手なので、皆無であるとは断言しませんが、すぐには見当たらないのは事実です）従って私は、当初電磁波には縦波は無いのだと思っていましたし、事実、素粒子の先端分野で学位を取り、その後サイエンスライターとして先端科学の知見を一般人に解説する本を書いているある方の解説本には、「何故電磁波には縦波が無いのか」という“説明”があった様に記憶しています。今となって思う事は、おそらくこの方は、電磁場の量子化という現代物理の先端的知見はあるものの、古典物理としての Maxwell 理論の詳しい事は知らなかったから、その様な事を書いたと思われます。

実際、電磁場の量子化の説明を読むと、物理的に意味のあるのは横波のみで、縦波は非物理的なもの故に、排除されるべきものと見做されています（もちろん、これは小嶋先生が言われる「普及版量子場理論」での話です）。素粒子分野では、この様な非物理的な存在は一般に ghost 場と呼ばれているようです。すなわち、“より進歩的な”量子論的視点に立てば、縦波は、そんなものはあってはならない“幽霊”なのです。この意見は、冒頭で書いた「霊の話」で紹介したグループ B が持っている見解に対応するものです。私がこの縦波問題についての勉強を個人的に進めて行く時間経過の中で、初めにこのグループ B の見解に、兎と亀の童謡に出て来るセリフ「なんと仰る兎さん！」的に異議を唱えたのは、小嶋先生が 2006 年に出された数理解析研究所講究録でありました。その概要を、参考の為に、以下にコピーします。

By re-examining the Nakanishi-Lautrup formalism of abelian gauge theory, we clarify the following fact: while the longitudinal photons or unphysical Goldstone bosons in the Higgs mechanism are eliminated from the physical space of states in the usual formulation, this statement applies to the above modes *only in their particle forms*. In their non-particle forms, the former appears physically as the infrared Coulomb tails and the latter as the so-called “macroscopic wave functions” arising from the Cooper pairs, both of which play essential physical roles.

もちろんこれが私にとって“衝撃”であった事は間違いありません。しかし、ここでまた、個人的に困ってしまいました。静電場のクーロンモードは問題無く OK としても、non-particle mode である古典的な縦波は、存在しても問題ないはずだが、縦波が古典理論で“記述されていない”という事はどういう事なのか？という疑問でした。非常に特殊な存在でない限り、学生向けの専門書に書いてあっていいはずなのに、それが無いという疑問です。

物理学において、もちろん量子論は、古典論の世界観を大きく変革した画期的な“現代的”理論ですが、小嶋先生の「量子─古典対応」の精神に見られる如く、古典論は、

量子論と比較した時に、すべての面で“劣っている時代遅れの理論”というわけではなく、自然現象を人間が理解する上で、この両者は相補的と見做されるべきものです。この重要な視点を強調しつつも、ここでは本稿のテーマである“物理怪談”を面白可笑しく進める為に、敢えて、量子論＝“進歩的かつ modern な理論”、古典論＝“Classical すなわち、当時は価値があったが、今となっては前時代的な因習に基づく遅れた理論”という風に捉えて、話を進めます。そうだとしたら、“現代的視点”からは否定された幽霊話は、やはり昔の“古典”世界をほじくり返すに限ると思い、古典電磁気に関する資料を色々と見て見ました。すると、まず霜田光一先生の A4２ページ程のノートに縦波の存在が書いてあるのを発見しました。その次は、Melvin Lax 等や Cicchitelli 等が Physical Review A に発表した論文に行きつきました。これは、大津先生の解説にあるように、有限幅のビーム状の波動については、必ず縦波が伴うという結果を示すものです。専門外の私は、Lax がどういう人か全く知りませんでしたが、大津先生より、Lax の論文を reviewer （または editor）として reject したら業界では生きていけないくらいの大物だと教えてもらいました。Lax のこの論文は、1975 年に出ていますが、大津先生の最近の調査によると、縦波は、Max Born との共著で Principles of Optics を書いた Emile Wolf も Lax 以前にその存在について書いているとの事でした。結論として、“古典世界”では思った通り、“幽霊”は科学者からも市民権を与えられ“立派”に存在していました。

それにしても、地球流体の分野にいた私にとって非常に奇異な事は、以下の事です。Lax や Wolf という光学界の重鎮が、その存在を語り、Lax に至っては Physical Review という世界的に見ても major な journal でその事を発表しているのに、（世界の事は知りませんが、少なくとも日本の学生むけの電磁気学の本には）縦波の事が殆ど触れられていないのは、どうしてでしょうか？私には理由がよく分かりません。これから電磁気学を学ぶ若い人が、私の様に、「縦波に関する幽霊問題」で時間を取られない為にも、この知見をもっと目にとまる形で学生向けの専門書等にも記述して欲しいと思います。

最後に一言。未解明現象の一つにガンマー線バーストというものがあるそうです。これは、継続時間はかなり短いものですが、宇宙の色々な方向から信じがたい程の高エネルギーガンマー線が頻繁に観測される現象のようです。最近の研究によるとこのガンマー線のビーム幅はかなり狭いという事なので、縦波成分もかなり入っているのではと想像します。天文学者はその発生にはブラックホールが関わっているのでは等の推測を色々していますが、もしそうだとすれば、ドレスト光子と同様に、特異点と空間的運動量の二つがその生成に大きく関与しているのではと、個人的にはそう思っています。

量子ウォーカーはしご酒

瀬川悦生
(横浜国立大学)

今年の2月に、世の中がCOVID-19による行動自粛の風潮になるかならないかのギリギリのときに、少し迷ったもののヨーロッパの交換留学プロジェクトで、量子ウォークの理論研究の第一人者の一人のステファナクさん (チェコ工科大学、プラハ) の所に、博士課程後期の学生さんと二人で訪問しました。大学は、プラハの観光地の中心で、モルダウ川のほとりにあります。ステファナクさんに紹介してもらった幾つかのお店は、一人当たりのビール消費量が世界一のことだけあり、ピルスナービールは絶品でしかも安価、また店員さんの愛想もよく、すっかり気に入ってしまいました。毎回大学から帰るときは、このようなお店についついトラップされてしまい、なかなか宿舎にたどり着けませんでした。

そのような中で、まさにピッタリの論文 [1] に出会いました。L 段のはしご状のグラフがあります。その四つ角にはセルフループをくっつけます。(ご本人はこれは全ての頂点の次数を3に揃えるだけという単純な理由からということのようでしたが、実はこれが後で面白いことを引き起こします。) これを Γ_L とおきます。そして四つ角の一つに「落とし穴」を作ります。この落とし穴付きのはしごグラフ上に量子ウォーク (QW) を走らせます。落とし穴の対角の位置にあるところから走らせて、ひとたびその落とし穴に落っこちたら、二度と出てこられません。問題は、「無限ステップ経過した時に、ウォーカーは Γ_L に存在するか?」です。これがもしランダムウォークだったら、ランダムウォークはある有限時刻で必ず落とし穴に到達するから、答えは「ノー」です。一方で、この論文によるとQWの場合は「イエス」となり、この論文のタイトルにある通りの非直観的な結末になります。さらにこの論文の数値計算による結果を注意深く見ていくと、もっと奇妙なことが見えてきました。生存確率を $\eta(L)$ とします。すると、$\eta(L)$ は十分に大きなはしごのサイズ L に対して、0ではない値に収束するのですが、その収束の仕方が単調減少になっているのです。路が長ければ、それだけ路の途中に、素敵なお店の誘惑に多く遭うのだから、なかなか目的地にたどり着けない、したがって、単調増加ではないか？プラハのロックダウンする寸前の夜の市街地をさんざん "はしご" して楽しんでいた私達にとっては、これは驚きでした。*

QWの生存確率 $\eta(L)$ の性質を整理しておきましょう。

(1) 生存確率 $\eta(L) > 0$;　(2) $\eta(L)$ は十分大きな L に対して単調減少。

ここで性質 (1) について、これまでの研究との関係から少し説明を付け加えさせてください。Γ_L 上のQWの時間発展行列から、落とし穴に関する部分を切り落とした部分行列を考えます。性質 (1) はその固有値の絶対値が1である固有空間が起因しています [2]。つまりこの固有空間と初期状態とのオーバーラップがある限り、必ず性質 (1) は保証されるのです。与えられらたグラフにサイクルさえあれば、この固有空間が存在するという便利な判別方法があります [3]。したがって今着目しているグラフ Γ_L ははしご状になっているので、L に比例し

*その2週間後位に街も大学もほぼロックダウンになったので、切り上げて帰国する形になりました

てサイクルが増加し、生存確率を保証する固有空間の存在感がより強まるわけです。そうなると、ますます性質 (2) は奇妙に思えてきます。実は、ドレスト光子の実験においても、外から光をナノ微粒子に照射すると、中にいるナノ微粒子数が多いほど、より出力信号の値が大きくなるといった (2) と似たような現象が起きています [4]。QW の設定におけるはしごの幅と長さがナノ微粒子の配列方向に関係していることを示唆しているようにも見えます。その辺りを今後追求していきたいと思います。

それではいよいよ本題の (2) に関して考えていきます。実は [3] では扱っていない設定が Γ_L には存在しており、ランダムウォークの直感に引きずられ、それを見落としていたのです。それはセルフループの存在でした。このセルフループの寄与で生まれる固有空間は、より一般的なグラフの設定においても (i) セルフループ間の最短経路パスで特徴づけられる; (ii) 生存確率への寄与の強さは、このパスの長さに反比例することが、この研究で明らかになりました。では、これらを踏まえて、仕上げに、(1) と (2) で考察した固有空間と初期状態とのオーバーラップを足し合わせて、生存確率を見てみましょう。すると、はしごの長さ L が大きいときには、漸近的に次のようになります。

$$\eta(L) \sim C_{Cycle}(1-\lambda^{2L}) + C_{SelfLoop}/L.$$

但し、C_{Cycle}、$C_{SelfLoop}$, λ はそれぞれ正の定数で、λ は真に 1 以下です。また、右辺の第一項、第二項はそれぞれサイクル、セルフループによる寄与を表しています。仮にセルフループがない場合を考えてみましょう。すると、第一項だけになるわけですが、この場合、生存確率が単調に増加することが解り、(1) で得られた直観が復元されます。その一方で、セルフループ追加という "小さな" グラフの構造に摂動を加えるやいなや、第二項が出現します。そして生存確率に対して L に、"微分" をとると、L が大きいときには微係数が負になるので、これで単調減少になることがこれで示されたことになりました。

夜の街をさらに連想する情報が得られます。良く眺めると「第一項、第二項は L に関して、それぞれ指数関数、多項式のオーダーで収束する」ということに気が付きます。つまり、ほんの数個のセルフループによって、生存確率の L に関する収束のスピードが指数関数的に遅延させられているのです。まるで「落とし穴があるから気を付けて」と注意喚起しているかのようです。いやむしろ、路上に数人 "悪い" 呼び込みが強力な人がいて、「あなたの家は落とし穴、もっとここで遊んでいけば？」という誘惑に乗り、帰宅を遅らされているとしたほうが、よいでしょうか？どちらがいいのかは皆さんにお委ねします。このセルフループの果たす役割は [4] によるドレスト光子の実験の文脈でも何かしらの解釈をとることができるのか？もしあるとすればどのようなものなのか？今の所、夜の街のたとえでしかできていませんので、楽しみな今後の課題になっています。

References

[1] J. Mares, J. Novotny, M. Stefanak, I. Jex, Phys. Rev. A 101.032113 (2002)

[2] Yu. Higuchi and E. Segawa, J. Phys. A: Math. Theor. 52 (39) (2019).

[3] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato, E. Segawa, J. Funct. Anal. 267 (2014) pp.4197-4235.

[4] W. Nomura, T. Yatsui, T. Kawazoe, M. Naruse, and M. Ohtsu, Appl. Phys. B 100 (2010) pp.181–187

ドレスト光子・複雑ネットワーク・知性の創出

松岡 雷士 (広島工業大学)

ネットワーク上の量子ウォークをトイモデルとして活用することで、ドレスト光子の諸性質が部分的・定性的ながらもモデル上で再現・解釈され始めた。ベースとなるモデルを改良していくことにより、再現可能な性質は少しずつ増えている。現段階では量子ウォークモデルとドレスト光子の物理との対応関係の理論構築は未だ断片的であり、直観と経験に基づく部分が大きい。しかしながら量子ウォークの数理を研究することによって得られる非直観的事実が、ドレスト光子への対応を考えるとなぜか直観的に符合してしまう。このある意味で不思議な体験を積み重ねるに従って、量子ウォークモデルとドレスト光子の間の本質的な対応関係の存在は期待から確信に変わりつつある。

量子ウォークとドレスト光子の対応関係についてはこの文章を書いているまさに今もメールが飛び交い、実験物理・理論物理・数理物理・数学の様々な側面からの議論が続いている。ここではトイモデルと物理的現象の対応については一旦脇に置いておき、トイモデル自体の概念拡張に関する過程をエピソード紹介の形式で書いてみることにする。

ドレスト光子には媒質となるマテリアルの構造を自律的に最適化する機能がある。ドレスト光子を生成させながらマテリアルに熱などのエネルギーを与えた場合、ドレスト光子が生成しやすい構造が自律的に創出される。この機能は Si-LED や太陽電池の効率向上に役立っており、Si-LED においては照射光の波長や偏光が保存・再生成されるという状況に基づいてフォトンブリーディングと呼ばれている[1]。このフォトンブリーディングを量子ウォークモデルの文脈で考えることは可能だろうか？

ここで「量子ウォークモデルはドレスト光子現象を記述するための的を射たトイモデルである」という仮説を肯定した上で話を進めてみる。量子ウォークのウォーカーは何かドレスト光子に対応する物理量を持つ塊であろう。とすればウォーカーが走っているネットワークは何かマテリアルに対応する性質をその構造として保持するものであるはずだ。ネットワークが持っている情報は主にノード同士を結合するエッジとその重みのみである。ここまで単純化して考えると、フォトンブリーディングはウォーカーがネットワークを走り回りながら、ネットワークの結合を切ったりつないだりしながら自分の都合のいいようにつなぎかえていく現象なのではないかというイメージが思い浮かぶ。文章にしてみると随分といい加減で自分でも笑えてくるが、このような仮説を次々に議論できるのがトイモデルの利点である。

ネットワークのつなぎかえについては著者に思い当たるところがあった。著者は大学４年の前期に取り組んだプレ卒論において、複雑ネットワークの一種であるスモールワールドネットワークについて研究を行っていたのだ。スモールワールドネットワークは規則正しいレギュラーネットワークの一部をランダムにつなぎかえることで生成できる[2]。ランダムなつなぎかえによってネットワーク間の平均経路長は急速に短縮される。一方で隣接ノード同士が結合され

ている度合を示すクラスター係数はそれほど減少しない。この短い平均経路長と大きなクラスター係数を併せ持つ性質が、現実世界の社会的なネットワークに整合する側面がある。著者は学科内に存在する社会ネットワークをスモールワールドの観点で解析する研究に挑戦したが、元データの収集には大変苦労した。しかしこのときの苦労が無ければ、量子ウォークにおけるネットワークつなぎかえの発想は得られなかったかも知れない。（このとき協力してくれた先輩諸氏にも深く感謝したい。）

その後フォトンブリーディングのモデル化は、複雑ネットワークのもう一つの花形であるスケールフリーネットワークをベースとして進めている。「つなぎかえ」というイメージをもう一段膨らませ、BA モデル[3]によるネットワーク生成過程を定常的な量子ウォークに整合させる形で拡張した。この部分は学術論文に書くべき内容であるため、説明はこのくらいにしておく。

量子ウォークのウォーカーがネットワークを自己修正・自己拡張していくモデルは概念として新しいものであると考えている。しかしながら量子ウォークを離れてもう少し広い範囲で考えてみると、ウォーカーに相当する何かがネットワークを最適化していくモデルは他にもいくつかあることに気付く。著者に思い浮かんだモデルはニューラルネットワークと粘菌コンピューティングであった。この二つのモデルはどちらも

(1) 局所的なルールに基づいてネットワーク上で情報のやり取りが行われ
(2) それに伴ってネットワークが変化する

という共通のコンセプトを持っている。(1) のコンセプトはネットワーク上の量子ウォークが元々持っていた性質であり、著者のこれまでの研究はそれに(2)のコンセプトを付与したことに相当する。偶然なのか必然なのかはわからないが、ニューラルネットワークと粘菌コンピューティングには

(3) 結果として「知性」、少なくともそれを模倣する現象が創出されている

という共通の性質がある。今後、量子ウォークがネットワーク変化を誘発することで、やはり知性と呼ぶべき何かが創出されるのであろうか？もしくはドレスト光子によるフォトンブリーディングは既に何らかの知性創出の結果なのか？ドレスト光子現象はアナログコンピューティングに利用できる？概念モデルを形成することでこのようにアナロジーが見つかり、新しい研究の方向性が垣間見えることもある。

粘菌コンピューティングについて調査するためにウェブ検索をしていたところ、大津理事長が参画した粘菌コンピューティングの研究に関する紹介記事がヒットした[4]。なんと大津理事長は量子ウォークと出会うずっと前に既に粘菌コンピューティングに目をつけていた。ともかく、量子ウォークモデルをネットワーク形成に関連付けた概念拡張は何かしら有益であったということを自己確認しつつ、今後も研究を進める所存である。

[1] M. Katori and H. Kobayashi, “Nonequilibrium Statistical Mechanical Models for Photon Breeding Process Assisted by Dresssed-Photon-Phonons” in Prog. Nanophotonics, 4, ed. T. Yatsui (Springer, Heidelberg), pp.19–55, 2017.

[2] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of 'small-world' networks”. Nature. Vol. 393 pp. 440–442, 1998.

[3] A. -L. Barabasi and R. Albert, “Emergence of Scaling in Random Networks” Science, Vol. 286, pp. 509–512, 1999.

[4] 「理研など、粘菌の行動原理に基づく新概念のコンピュータを開発」（https://news.mynavi.jp/article/20130812-a140/）

量子系におけるマクロ・セクター・測定

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

物理理論の進展に数学が貢献した例は数多くあり，新しい物理概念の実装は新しい数学を導入してはじめて実現される場合がある。量子論の場合，フォン・ノイマンがヒルベルト空間を用いて量子力学の公理系を“完成”させたのはよく知られているが，量子場理論や量子情報理論にはその数学的研究を通じて長きに渡って様々な数学が供給され続けている。

量子論の代数的定式化では，$*$-代数 $\mathcal{A}$ により物理量代数を記述し，$\mathcal{A}$ 上の期待値汎関数 ω により状態を記述する。代数的な観点からはヒルベルト空間は解析で必要に応じて利用する二次的なものとして扱われる。この定式化において，ヒルベルト空間は状態 ω ごとに GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$（記号は著者の前回のオフシェル科学フォーラム記事参照）で与えられる：

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle, \qquad A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

量子場理論の定式化には $*$-代数の特殊な場合である C*-代数 $\mathcal{X}$ が用いられる。以下ではその場合に限定して議論する。GNS 表現により様々なヒルベルト空間が与えられることがわかったが，ヒルベルト空間そのものだけでなく表現に物理的意味がある，ということが代数的定式化での本質的な概念的理解の進歩である。この進歩に対しては [1] の貢献が多大である。[1] 以前にも代数的定式化の研究はあったが,（状態の選択に応じて）様々な表現が登場する事実と向き合い成功を収めたのは [1] が最初であろう。[1] では，表現の「物理的同値」（弱同値とも呼ぶ）を用いて同値な表現の間の取り替えに明確な意義を与えた。[2, 3] では,（代数的）量子場理論において一定の基準で選ばれた異なる表現が共存する状況に物理的に意味が与えられた。DHR 選択基準と呼ばれる,（真空状態から GNS 表現で得られる）真空表現とある領域と空間的な領域上の物理量のなす代数の表現として（ユニタリー変換を通じて）等価な表現を選び取る基準を満たす表現は，量子場の局在励起がある状況を記述する。そのうちある条件を満たすクラス（集まり）は，位相的電荷が存在する状況に対応しており，それらを用いることにより物理量代数 $\mathcal{A}$ から場の代数 $\mathcal{F}$ と大域ゲージ群 G が再構成されることが [4] で示された。この成果は代数的量子場理論における象徴的な結果として知られている。電荷が異なる表現はそれぞれに（ユニタリー同値類で）セクターを形成し，それらは単に互いに非ユニタリー同値というだけでなく「無縁（互いに素とも言う）」の関係にあって所謂「超選択則 (superselection rule)」が生じる。ここの大域ゲージ群 G は破れがない対称性にあたり，[4] の成果は破れた対称性にはこのままでは有効でない（[5] 参照）。対称性が果たしてきた歴史的意義と効用，そして対称性の破れのある状況の重要性は別の機会に譲る。[4] の結果の対称性の破れのある状況への拡張は [5, 6] でなされていて，その上で，小嶋 [7] は一般化したセクターを「因子状態の準同値類」として定義し，測定を含む様々な文脈での量子系におけるマクロ的側面を統一的に扱うことを可能にした。

量子測定理論の今日までの発展は [8] によるインストルメント (instrument) の導入が大きい。インストルメントは統計的観点から導入されたものであり，測定装置を用いて系を測定することで得られる確率分布と，測定後の状態を指定するために用いられる。しかし，[8] で導入されたインストルメントもはじめは通常の量子力学の記述との関係が不明であったため，インストルメントを用いた解析は [9] の登場まで進展しなかった。[9] では完全正値インストルメントと，測定の量子力学的モデリングである測定過程が導入された。[9] の主結果から，有限自由度量子系でのどの

完全正値インストルメントも測定過程をもちいて定義されることが知られている。更には，一般のフォン・ノイマン代数で記述される無限自由度量子系での完全正値インストルメントの理論は最近 [10] で発展した。現行の測定理論では，確率分布と測定後の状態に焦点を当てることで測定によりマクロ化する要素が選択され，量子力学的モデリングとの関係を調べたことが成功につながったのである。

より一般に C*-代数で記述される量子系での測定理論では，セクター概念および完全正値インストルメントを統合した形での測定の記述が必要であると考えている。その理由は，状態概念に関わる統計的な文脈では，測定値の違いがマクロに区別される差異であるべしと考えるのが自然だからである。すなわち，測定値が異なれば無縁な状態になる状況に結びつける物理過程が測定であるという考え方である。この考え方からすれば，測定の量子力学的モデリングである測定過程も当然重要ではあるが，測定の物理的意味付けおよび記述法の確立のため必ずしも第一に考慮すべきものではない。その一方で，セクターの測定による識別自体が測定理論的な記述により正当化されるという利点がある。本稿で述べた C*-代数で記述される量子系での測定理論の確立によって，量子系におけるマクロの理解に新たな展望が開けると確信している。[11] ではこの試みの一部を実現している。また，[12] は本稿の内容の源流となる結果である。現在執筆中の論文において本稿の試みを実現させるととも [12] では未完になった領域まで手が届いて，新しいマクロ・測定の理解を共有できるようにしていく予定である。本年もよろしくお願いいたします！

参考文献

[1] R. Haag and D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, J. Math. Phys. **5**, 848–861 (1964).

[2] S. Doplicher, R. Haag, and J.E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1–23 (1969); **15**, 173–200 (1969).

[3] S. Doplicher, R. Haag, and J.E. Roberts, Local observables and particle statistics I & II, Comm. Math. Phys. **23**, 199–230 (1971); **35**, 49–85 (1974).

[4] S. Doplicher and J.E. Roberts, Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131**, 51–107 (1990).

[5] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria: order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions, Open Sys. Inform. Dyn. **10**, 235–279 (2003).

[6] I. Ojima, Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40**, 731–756 (2004).

[7] I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics. In *Stochastic Analysis: Classical And Quantum: Perspectives of White Noise Theory*, (World Scientific, 2005) (pp.143–161).

[8] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17**, (1970), 239–260.

[9] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, J. Math. Phys. **25**, (1984), 79–87.

[10] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, J. Math. Phys. **57**, (2016), 015209.

[11] 岡村 和弥, A C*-algebraic approach to quantum measurement, 数理解析研究所講究録 **2123**, (2019).

[12] I. Ojima, K. Okamura, and H. Saigo, Derivation of Born rule from algebraic and statistical axioms, Open Sys. Inform. Dyn. **21**, 1450005 (2014).

〈物理量の代数〉とは何か：圏代数による定式化へ

西郷　甲矢人 (長浜バイオ大学)
E-mail: h_saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

以前、本フォーラムにおいて、オフシェル科学の基盤について考えるためには「状態とは何か」といった根本的な問題について再考する必要がある、と述べた（西郷甲矢人『〈状態〉とは何か』、オフシェル科学フォーラム、２０２０年)。そこでは、系と環境のインターフェイスとしてのあり方である状態を、「物理量の代数」から「複素数」への写像（各物理量にその期待値を対応させる「期待値汎関数」）として捉える考え方について説明した。

次の疑問は、「物理量の代数」をどのように考えるべきか？ということになる。量というものは、足したり掛けたりできるものであり（もちろんそれに物理的な意味があるかどうかは自明ではないが「考えることはできる」)、量の全体が代数をなすことは自然な仮定と考えられる。一方で、それが「物理」量、つまり物理系の何らかの特性を表していなければならないことを考えると、その物理系のダイナミカルな特性との関係を持った代数を考えるべきだろう、ということに気づく。すると、「物理系のダイナミカルな特性」から「代数」が定まるといった筋書きが見えてくる。

では、物理系のダイナミカルな特性というものをどのように捉えるのが適切であろうか。我々はオフシェル科学という新しい領域に乗り出そうというのだから、少なくとも最初は十分に一般的なダイナミクス概念から出発することが望ましい。この十分に一般的な「ダイナミクス」概念として、われわれは「圏」の概念を用いることを提案する。圏とは、「対象」と呼ばれるものたちと、それらの間を媒介する「射」（あるいは矢）と呼ばれるものたちからなるシステムであって、一方の「行き先」と他方の「出どころ」が一致する二つの射は「合成」ができ、合成は結合律を満たし、各対象にはそこから自身への「恒等射」と呼ばれる「何に合成してもその相手を変えない」射が存在するようなものをいう。

物理系のダイナミクスを捉えるということは、それについていろいろ測定を行った時に起きうる「出来事」＝「事象」たち（これが対象）とそれらの間の可能な「推移」（これが射）の全体を捉えることである、と、とりあえずはいうことができるだろう。それらの推移が、どのような「重み」を持つことになるかということはまさに系と環境とのインターフェイスによって定まるものであろうから、まずはあらゆる「可能な遷移」たちを、いわば「不定元」として「生のまま」考えるのが適切であろう。そういうわけで、われわれは物理系のダイナミカルな特性を圏として捉えるのである。

さて、射を「不定元」として考えると述べたが、ここまでくれば「圏代数」まではあと一歩である。不定元から多項式の全体（多項式環）を考えることに馴染んでいる読者も多いであろうが、まさにその一般化としてわれわれは圏から「圏代数」を考えることができるのである。具体的には、「幾つかの射を（適当な係数を掛けつつ）足し合わせたもの」たちを要素とし、そこに圏の「合成」から自然に定まる積をこめて考えると、これは代数となる（対象全体の集まりが有限集合の場合、積の「単位元」も存在する。一般の場合にも、「単位元」を付加して考えることが可能である)。これを圏代数という。圏代数は、関数環・多項式環・群環・隣接代数・行列環といった数学において重要な諸概念を自然に含み込む概念でもあり、それ自体としても大変興味深い。そのような圏代数を、われわれはオフシェル科学の基盤に据えようとするのである。

さらに、圏に「共役」的な構造、つまり「二回行うと元に戻る」演算が定められる場合には、圏代数は *-代数と呼ばれるものになり、「正値性」の概念も定められる。ここまでくれば、圏代数

を〈物理量の代数〉であると考えてもよいだろう。そして以前の記事で（一般の *-代数に関して）述べたような道筋で、圏代数上の状態概念を考えることができ、確率法則を論じたり、GNS 構成を通じてヒルベルト空間の枠組みの中で表現を考えたり、いわゆる「量子力学」で扱われる発展方程式を扱うなど、様々なことが可能になる。とくに、圏の射がすべて可逆の場合、つまり圏が「亜群」である場合が典型的である。なお、この「亜群」に関する圏代数（「亜群代数」）を用いてシュウィンガー流の量子力学の定式化を扱う先行研究も存在しており（例えば F. M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort, and G. Marmo. Schwinger's Picture of Quantum Mechanics. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 17(04):2050054 (14), 2020. など）、われわれのアプローチは彼らのものを包含しつつ、不可逆性のある場合やいわゆる「不定計量」の問題までも自然に取り込めるように一般化しようとするものであるともいえる。

また、GNS 構成を通じてもともとのダイナミクスを（多くの場合において）ヒルベルト空間の枠組みで表現できることから、「量子ウォーク」についても論じることが可能になる。量子ウォークとドレスト光子のつながりについては、本フォーラムをはじめ様々な場で論じてきたとおりである。このように、圏代数はオフシェル科学の基盤の探求において役立つとともに、その大きな枠組みと具体的なモデリングとを自然につなげる役割をも果たすと考えられる。そして、量子ウォークを関数環・多項式環・群環・隣接代数・行列環といった概念と対等に扱うこと自体が数学として興味深いのはもちろんのこと、物理現象として重要であるにも関わらず「オンシェル科学」からは非本質的・異端的なものとして（そんなことは本当は不可能であるにも関わらず）「排除」されがちな諸現象を適切に位置づけるためにも、圏代数を要として物理理論を定式化していくことが重要であるとわれわれは考えている。

ドレスト光子の足跡：ドレスト光子から自由光子へ

三宮 俊（株式会社リコー）
E-mail: suguru.sangu@jp.ricoh.com

一般的に「自由光子」は質量ゼロの量子であり、自由空間を光速で飛び交うことができる。一方、「ドレスト光子」は環境との相互作用の結果、あたかも質量をもった準粒子のように見なされ、ゆえに局在性やバリスティック伝導性といった特有の現象を垣間見ることができる。とはいえ、この両者は独立な存在ではなく、物質形状やサイズ、材料の最適デザインを得てお互いに行き来できる立場にある。同じことを述べているかも知れないが、著者の頭の中には 2 つの物理的な描像がある。一つは、自由光子と物質系の自由度（電子励起やフォノン）が結合した状態から物質系の自由度を切り離して自由光子を取り出すという描像であり、もう一方は、ドレスト光子の質量が観測するスケールに応じて異なって見える（巨視的な系に移ると軽くなる）、という描像である。本稿では、後者の立場に立って、日頃、イメージを膨らませているドレスト光子の質量が変化する様子を（定性的ではあるが）言語化してみたい。

質量と相互作用が同等であろうことは、繰り込み理論や有効質量近似といった近似表現においてよく知られていることであろう。例えば、有効質量近似は結晶中の電子が結晶格子との相互作用環境下にある状況を、有効質量をもった自由粒子（量子）と見なすことで、相互作用の詳細を書き下すことなく、あまた物理現象を記述することができる。これを著者は「粗視化」と表現している。結晶格子に強く束縛された粒子ほど重いといったイメージである。この描像をドレスト光子に当てはめると、巨視的な系に観測を移すほど、微視的／局所的な系における相互作用は弱く見えてくる、ということになる。相互作用を巨視的な系の質量に繰り込むほどに質量が軽くなるといったやや不可思議な状況に陥る。

そこで、「繰り込む」というイメージが何やら違うようだ、との見方に至っている。以前のオフシェル科学フォーラムでも述べさせていただいているが[1]、巨視的な系での観測は窓関数を乗じて物理現象を捉えることに対応している。ドレスト光子の局在現象などは、巨視的な系での観測には直接影響せず（窓関数の外に残され）、観測にかかる部分にその影響を少しだけ載せたものが見えているように思われる。すなわち、遠方での観察に現れる微視的な効果や、または局在するドレスト光子自身の制御は、観測にかかる中間的な状態を通じて自由光子へと接続されているようにイメージされる。

ところで、以前よりドレスト光子を表現する適当な基底状態なるものが欲しいということは各所で述べてきた[2]。基底状態をうまく記述できたのであれば、基底状態間の相互作用の大きさ（遷移行列）もまた決定することができる。微視的な系における挙動を表現する基底状態と中間的なサイズの挙動を表現する基底状態との間の結合は比較的弱く（物質内の近距離から遠距離までの相互作用の均されたものであり）、あたかも質量の軽いドレスト光子が遷移を仲介しているかのように見え、これが自由光子と連続的に接続しているという見方が自然であるように思われる。ここでやるべ

きことは、微視的な基底状態と中間的な基底状態の線引きをどこでするかということと、中間的な基底状態の影響を微視的な基底状態の挙動にどのように残すかということだと考えている。中間的な基底状態を周囲環境のように微視的な基底関数間の相互作用に繰り込むという手順が粗視化というわけである。上述した「不可思議な状況」は、重い質量にあたる部分は系の中に留まり、窓関数を当てた部分（中間的な基底状態）を物質外部の自由光子場と結合した熱浴と見なすことで、微視的な部分のほうに質量を付与するという理解で矛盾なく説明され、質量の軽いドレスト光子なるものは登場しない。前述では、繰り込み理論と有効質量近似を同列かのように記載したが、おそらくこれらは別物で、ドレスト光子の上記解釈は有効質量近似に近いものである（環境影響を質量に置き換えている）。このように考えると、窓関数（プローブ）の当て方でドレスト光子の質量が変わり、ドレスト光子の挙動が変わってくるので、少し厄介でもある。線引きの仕方であるが、現状のところ明確な基準を見出せておらず、当面のところ、プローブで微視的な系が乱されない（低次の摂動で収まる）範囲で作為的に線引きすることにしておく。

本稿の残りの部分では、中間的な基底状態の影響を微視的な基底状態の挙動にどのように組み込むかについて、構想を簡単に述べておく。基底状態の線引きを作為的に行うという立場から、基底状態の集合を標的空間とその補空間とに分割し、補空間の影響を形式的に削除する「射影演算子」の方法が使えそうである。本手法を適用することにより、補空間の影響を取り込んだ有効相互作用ハミルトニアンが定義され、ドレスト光子の見かけの質量変化が与えられる。また、動的挙動に着目すると、もともとの熱浴（自由光子場）にドレスト光子の補空間が加えられる（摂動やマルコフ近似を適用する）ことになり、緩和定数が改訂される。理論検討が不十分であるが、従来から知られている結合量子ドット系のポンププローブ分光において観察される高速なエネルギー移動[3]についても、上述のような繰り込みによって説明し得るかも知れない。

以上、ドレスト光子が自由光子に移り変わる様子をドレスト光子の質量に着目して定性的に議論してきた。未だ考察不十分なところは否めないが、ドレスト光子の基底状態を適切に表現することにより、局所的な系におけるドレスト光子の挙動と巨視的な観測を仲介する中間階層のドレスト光子の挙動を相互作用の大きさを指標として切り分け、後者を熱浴に置き換えていく、というアプローチ方法がうまくいきそうに感じている。本稿の一つのメッセージは、いかなる「光子」も相互作用下にあるドレスト光子に端を発しており、熱浴（観測のためのプローブ）の介入のさせ方が観測される自由らしき光子にも、物質系に留まるドレスト光子にも足跡を残すという点である。観測用プローブの大きさによって見える現象が異なるなど、実験による先行知見とも合致しているように思われる。

参考文献

[1] 三宮，「ドレスト光子とナノ構造の「窓」」，オフシェル科学フォーラム 2019 年度.

[2] 例えば、三宮・他，第 67 回応用物理学会春季学術講演会，14p-B309-15 (2020).

[3] M. Ohtsu, OffShell: 2005O.001.v1, DOI: 10.14939/2005O.001.v1 (2020).